

1 Suites de Cauchy et complétude

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit que u est une **suite de Cauchy** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

Lorsque la réciproque est vraie, on dit que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est **complet**.

On dit aussi que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un **espace de Banach**.

2. Montrer que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est complet. Expliquer rapidement pourquoi c'est encore vrai pour un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
3. Montrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente à valeurs dans cet espace est convergente.

Solution de 1 : Suites de Cauchy et complétude

1. Soit (u_n) une suite convergeant vers une limite ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\|u_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $n \geq N$ et $p \geq 0$. L'inégalité triangulaire donne

$$\|u_{n+p} - u_n\| = \|u_{n+p} - \ell + \ell - u_n\| \leq \|u_{n+p} - \ell\| + \|\ell - u_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La suite (u_n) satisfait donc le critère de Cauchy.

2. ■ En prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition d'une suite (u_n) de Cauchy dans $\mathbb{K}$, on obtient qu'une telle suite est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente vers une limite ℓ .

Or, on va montrer qu'une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge vers cette même valeur.

En effet, posons $\varepsilon < 0$. On a un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Prenons alors $n \geq N$, et alors $\varphi(n) \geq n \geq N$. On peut alors écrire $\|u_n - \ell\| \leq \|u_n - u_{\varphi(n)}\| + \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

La suite (u_n) converge donc vers ℓ , ce qui prouve que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est complet.

- Dans un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$, toutes les normes sont équivalentes. Quitte à choisir la norme infini dans une base fixée, une suite de Cauchy revient à avoir toutes les suites de coordonnées dans cette base sont aussi de Cauchy, donc convergent d'après le cas précédent, ce qui permet de conclure que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

3. ($\implies$) Supposons l'espace complet. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^n \|u_k\|$.

$$\text{Pour } n, p \in \mathbb{N}, \|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\| = \Sigma_{n+p} - \Sigma_n.$$

La série des normes étant convergente, la suite réelle (Σ_n) est convergente donc de Cauchy, donc la suite (S_n) est donc de Cauchy.

L'espace étant complet, la suite (S_n) converge : la série $\sum u_n$ est convergente.

- ($\impliedby$) Supposons que toute série absolument convergente converge. Soit (x_n) une suite de Cauchy.

En appliquant la définition avec $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, on construit une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^n}$.

En effet, si N_n est le rang de la définition de suite de Cauchy associé à $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, il suffit de poser $\varphi(0) = N_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \max(\varphi(n-1), N_n)$.

La série $\sum (x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$ est absolument convergente par comparaison à la série géométrique convergente à termes positifs $\sum \frac{1}{2^n}$.

Par hypothèse, elle converge. Par télescopage, la suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ .

La suite (x_n) étant de Cauchy avec une suite extraite convergente, on en déduit comme en question 2 qu'elle converge vers ℓ . L'espace est donc complet.

2 Inégalités de Hölder, de Minkowsky et $\|\cdot\|_p$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}^+$, alors

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2. En déduire l'inégalité de Hölder sur $\mathbb{K}^n$

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

3. En déduire l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p},$$

puis que $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

4. Déterminer la limite de $\|x\|_p$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.

Solution de 2 : Inégalités de Hölder, de Minkowsky et $\|\cdot\|_p$

1. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la concavité de $\ln$ appliquée à a^p et b^q .

2. C'est immédiat si $x = (0, \dots, 0)$ ou $y = (0, \dots, 0)$.

Sinon, posons $x' = \frac{x}{\|x\|_p}$ et $y' = \frac{y}{\|y\|_q}$ de telle sorte que $\|x'\|_p = \|y'\|_q = 1$. On veut alors montrer que $\sum_{k=1}^n |x'_k y'_k| \leq 1$.

D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x'_k y'_k| \leq \frac{1}{p} |x'_k|^p + \frac{1}{q} |y'_k|^q$ d'où, en sommant,

$$\sum_{k=1}^n |x'_k y'_k| \leq \frac{1}{p} \|x'\|_p^p + \frac{1}{q} \|y'\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

3. ■ En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ puis la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ donc $p + q = pq$ donc $q(p-1) = pq - q = p$.

Ainsi,

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p+1/q} = \left(\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \right) \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q},$$

ce qui permet de conclure, que $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p$ soit nul (auquel cas l'inégalité à montrer est triviale) ou non.

■ La bonne définition, la séparation et l'homogénéité de $\|\cdot\|_p$ ne posent pas de problème.
L'inégalité triangulaire a été vue dans la question précédente.

4. On remarque que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (n \|x\|_\infty^p)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_\infty$$

avec $n^{1/p} = e^{\ln n/p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \infty$ donc $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \|x\|_\infty$.