Source : Analyse MP - Monier

1. Exemple de norme paramétrée par une fonction

Énoncé

On note $E=\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$ et, pour $\varphi\in E$, $N_\varphi : E\longrightarrow\mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall f\in E,\quad N_\varphi(f)=\|f\varphi\|_\infty.$$

1. Montrer que N_φ est une norme sur E si et seulement si $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ=\varnothing$.
2. Montrer que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})=\varnothing$.

Solution

1. Soit $\varphi\in E$. Puisque $f\varphi$ est continue sur le segment $[0;1]$, $f\varphi$ est bornée, et donc $N_\varphi(f)$ existe dans $\mathbb{R}$.
   On a, pour tous α de $\mathbb{R}$ et f,g de E

$$N_\varphi(\alpha f)=\|\alpha f\varphi\|_\infty=|\alpha|\,\|f\varphi\|_\infty=|\alpha|N_\varphi(f)$$

$$N_\varphi(f+g)=\|(f+g)\varphi\|_\infty=\|f\varphi+g\varphi\|_\infty\leqslant\|f\varphi\|_\infty+\|g\varphi\|_\infty=N_\varphi(f)+N_\varphi(g).$$

   (a) Supposons $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ=\varnothing$.
   Soit $f\in E$ telle que $N_\varphi(f)=0$; on a donc $f\varphi=0$.
   Supposons $f\neq 0$. Il existe $x_0\in[0;1]$ tel que $f(x_0)\neq 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe un intervalle I, inclus dans $[0;1]$ et de longueur >0, tel que

$$\forall x\in I,\ f(x)\neq 0.$$

   On a alors

$$\forall x\in I,\ \varphi(x)=0,$$

   ce qui contredit $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ=\varnothing$.
   Ceci montre $f=0$, donc

$$\forall f\in E,\ (N_\varphi(f)=0\Longrightarrow f=0),$$

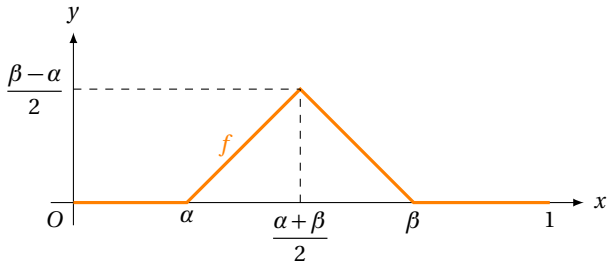
   et finalement, N_φ est une norme sur E.

   (b) Supposons $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ\neq\varnothing$.
   Alors $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ$, étant un ouvert non vide de $[0;1]$, contient au moins un intervalle $]\alpha;\beta[$ tel que $\alpha<\beta$. On a ainsi

$$\forall x\in[\alpha;\beta],\ \varphi(x)=0.$$

   Considérons l'application $f:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant\alpha \text{ ou } \beta\leqslant x\leqslant 1\\ x-\alpha & \text{si } \alpha\leqslant x\leqslant\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ \beta-x & \text{si } \dfrac{\alpha+\beta}{2}\leqslant x\leqslant\beta.\end{cases}$$



   On a alors $f\in E$, $f\neq 0$, et $f\varphi=0$ donc $N_\varphi(f)=0$.
   Ceci montre que N_φ n'est pas une norme sur E.

   Finalement, N_φ est une norme sur E si et seulement si $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ=\varnothing$.

2. Soit $\varphi\in E$.

(a) Supposons $\varphi^{-1}(\{0\})=\varnothing$, c'est-à-dire

$$\forall x\in[0;1],\quad \varphi(x)\neq 0.$$

Alors, $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ=\varnothing$, donc, d'après a), N_φ est une norme sur E.
On a

$$\forall f\in E,\ N_\varphi(f)=\|f\varphi\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty\|\varphi\|_\infty.$$

D'autre part, puisque $\varphi\in E$ et que φ ne s'annule en aucun point, $\dfrac{1}{\varphi}$ existe dans E, d'où

$$\forall f\in E,\ \|f\|_\infty=\left\|\frac{1}{\varphi}f\varphi\right\|_\infty\leqslant\left\|\frac{1}{\varphi}\right\|_\infty\|f\varphi\|_\infty=\left\|\frac{1}{\varphi}\right\|_\infty N_\varphi(f).$$

On a montré

$$\forall f\in E,\ \left(\left\|\frac{1}{\varphi}\right\|_\infty\right)^{-1}\|f\|_\infty\leqslant N_\varphi(f)\leqslant\|\varphi\|_\infty\|f\|_\infty,$$

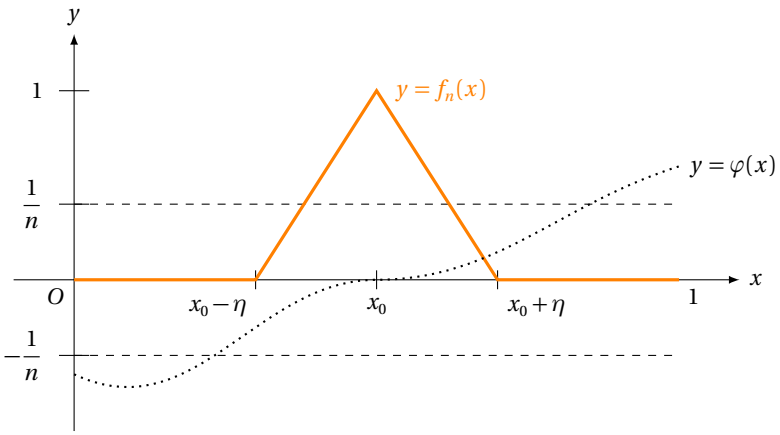
et donc N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur E.

(b) Réciproquement, supposons que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ soient des normes sur E équivalentes.
D'après 1, on a déjà $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ=\varnothing$.
Supposons $\varphi^{-1}(\{0\})\neq\varnothing$. Il existe donc $x_0\in\varphi^{-1}(\{0\})$, c'est-à-dire tel que $\varphi(x_0)=0$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque φ est continue en x_0 et que $\varphi(x_0)=0$, il existe $\eta>0$ tel que

$$\forall x\in[x_0-\eta;x_0+\eta]\cap[0;1],\quad |\varphi(x)|\leqslant\frac{1}{n}.$$

Considérons l'application $f_n:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant x_0-\eta \text{ ou } x_0+\eta\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{x-x_0+\eta}{\eta} & \text{si } x_0-\eta\leqslant x\leqslant x_0\\ \dfrac{x_0+\eta-x}{\eta} & \text{si } x_0\leqslant x\leqslant x_0+\eta.\end{cases}$$



On a alors $f_n\in E$, $\|f_n\|_\infty=1$, et, pour tout x de $[0;1]$

$$\begin{cases}|f_n(x)\varphi(x)|\leqslant|\varphi(x)|\leqslant\dfrac{1}{n} & \text{si } |x-x_0|\leqslant\eta\\ f_n(x)\varphi(x)=0 & \text{si } |x-x_0|\geqslant\eta\end{cases}$$

donc

$$N_\varphi(f_n)=\|f_n\varphi\|_\infty\leqslant\frac{1}{n}.$$

Ainsi, $\|f_n\|_\infty\longrightarrow 1$ et $N_\varphi(f_n)\longrightarrow 0$, donc $\|\cdot\|_\infty$ et N_φ ne sont pas équivalentes.

Finalement, N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})=\varnothing$.

2. Distance à un fermé

Énoncé

Soit E un evn : à chaque partie fermée non vide A de E, on associe l'application $d_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in E, \quad \mathrm{d}_A(x) = \mathrm{d}(x, A) = \inf_{a \in A} \mathrm{d}(x, a).$$

Montrer que l'application $A \mapsto \mathrm{d}_A$ est injective.

Solution

Soient A, B deux parties fermées non vides de E telles que $\mathrm{d}_A = \mathrm{d}_B$.
Pour tout $a \in A$, on a $\mathrm{d}_A(a) = \inf_{x \in A} \mathrm{d}(a, x) = 0$.
Puisque $\mathrm{d}_A = \mathrm{d}_B$, on en déduit que $\mathrm{d}_B(a) = 0$. Ceci implique que $a \in \overline{B}$.
Puisque B est une partie fermée, $\overline{B} = B$, d'où $a \in B$. Ainsi, $A \subset B$.
Par symétrie des rôles de A et B dans l'hypothèse, on obtient également $B \subset A$.
Finalement, $A = B$, ce qui prouve que l'application $A \mapsto \mathrm{d}_A$ est injective.

3. Normes équivalentes

Énoncé

On note E le $\mathbb{R}$-ev des applications $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[0;1]$ et telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on note

$$N(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0;1]} |f'(x)| \quad \text{et} \quad \nu(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x) + f'(x)|$$

Montrer que N et ν sont des normes sur E, et qu'elles sont équivalentes.

Solution

- Montrons d'abord que N et ν sont des normes sur E.
  Pour $f \in E$, $N(f)$ et $\nu(f)$ existent dans $\mathbb{R}$ car f et f' sont continues sur le segment $[0;1]$, donc bornées.
  Les propriétés, pour tout α de $\mathbb{R}$, f, g de E :

  $$N(\alpha f) = |\alpha| N(f), \qquad \nu(\alpha f) = |\alpha| \nu(f)$$
  $$N(f+g) \leqslant N(f) + N(g), \qquad \nu(f+g) \leqslant \nu(f) + \nu(g)$$

  sont immédiates.
  Soit $f \in E$. Si $N(f) = 0$ alors $\sup_{x \in [0;1]} |f(x)| = 0$ donc $f = 0$.
  Supposons $\nu(f) = 0$. Alors $f + f' = 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x}$.
  Comme $f(0) = 0$ on déduit $\lambda = 0$ puis $f = 0$.
  Ainsi, N et ν sont des normes sur E.
- Soit $f \in E$. On a

  $$\forall x \in [0;1], \quad |f(x) + f'(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \leqslant N(f),$$

  d'où $\nu(f) \leqslant N(f)$.
  D'autre part, pour tout $x \in [0;1]$, on remarque que $\mathrm{e}^x (f(x) + f'(x)) = (\exp \times f)'(x)$. En intégrant entre 0 et x et en utilisant $f(0) = 0$:

  $$\mathrm{e}^x f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t (f(t) + f'(t)) \, \mathrm{d}t$$

  On en déduit :

  $$|f(x)| = \mathrm{e}^{-x} \left| \int_0^x \mathrm{e}^t (f(t) + f'(t)) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t |f(t) + f'(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x} \nu(f) \int_0^x \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$$

  Ce qui donne

  $$|f(x)| \leqslant \nu(f)(1 - \mathrm{e}^{-x}) \leqslant \nu(f).$$

  De plus, on a

  $$|f'(x)| = |f(x) + f'(x) - f(x)| \leqslant |f(x) + f'(x)| + |f(x)| \leqslant \nu(f) + \nu(f) = 2\nu(f).$$

  Il en résulte que $\sup_{x \in [0;1]} |f(x)| \leqslant \nu(f)$ et $\sup_{x \in [0;1]} |f'(x)| \leqslant 2\nu(f)$, ce qui donne par addition :

  $$N(f) \leqslant 3\nu(f).$$

  Finalement, $\nu(f) \leqslant N(f) \leqslant 3\nu(f)$, donc N et ν sont des normes équivalentes.

4. Norme sur l'espace des fonctions lipschitziennes

Énoncé

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications lipschitziennes de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=0$. Pour tout $f\in E$, on définit $N(f)$ par

$$N(f)=\inf\{k\in\mathbb{R}^+,\ \forall (x,y)\in[0;1]^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|\}$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que pour tout $f\in E$
$$\|f\|_\infty\leqslant N(f)$$
3. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E ?

Solution

1. **Bonne définition** Pour chaque $f\in E$, l'ensemble des constantes de Lipschitz est non vide.
Il est minoré par 0.
Sa borne inférieure $N(f)$ existe donc dans $\mathbb{R}^+$.
Séparation Soit $f\in E$ telle que $N(f)=0$.
Pour tous $x,y\in[0;1]$, on a par passage à la limite dans la définition de la borne inférieure $|f(x)-f(y)|\leqslant 0$.
La fonction f est constante sur $[0;1]$.
Puisque $f(0)=0$, on obtient $f=0$.
Homogénéité Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $f\in E$.
Pour $k\in\mathbb{R}^+$, l'inégalité $|\lambda f(x)-\lambda f(y)|\leqslant k|x-y|$ équivaut à $|f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{k}{|\lambda|}|x-y|$ si $\lambda\neq 0$.
Par passage à la borne inférieure, on obtient $N(\lambda f)=|\lambda|N(f)$.
Le cas $\lambda=0$ est trivialement vérifié.
Inégalité triangulaire Soient $f,g\in E$.
Pour tous $x,y\in[0;1]$, on a par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$
$$|(f+g)(x)-(f+g)(y)|\leqslant|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|\leqslant(N(f)+N(g))|x-y|$$
Ceci prouve que $N(f)+N(g)$ est une constante de Lipschitz pour $f+g$.
Par définition de la borne inférieure, on obtient $N(f+g)\leqslant N(f)+N(g)$.
L'application N est bien une norme sur E.
2. Soit $f\in E$ et $x\in[0;1]$.
Par définition de la borne inférieure, on a $|f(x)-f(0)|\leqslant N(f)|x-0|$.
Puisque $f(0)=0$, on obtient $|f(x)|\leqslant xN(f)$.
Comme $x\leqslant 1$, on a $|f(x)|\leqslant N(f)$.
En passant à la borne supérieure sur $[0;1]$, on déduit
$$\|f\|_\infty\leqslant N(f)$$
3. Supposons par l'absurde que ces normes soient équivalentes.
Il existerait une constante $C>0$ telle que pour tout $f\in E$
$$N(f)\leqslant C\|f\|_\infty$$
Considérons la suite de fonctions $f_n:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie pour $n\geqslant 1$ par
$$f_n(x)=x^n$$
On a $f_n(0)=0$ et chaque f_n est de classe C^1 sur le segment fermé $[0;1]$.
Ces fonctions sont lipschitziennes.
La norme infinie donne $\|f_n\|_\infty=1$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, la borne inférieure des constantes de Lipschitz de f_n correspond au borne supérieure de $|f_n'|$ sur $[0;1]$.
On a donc $N(f_n)=\sup\limits_{x\in[0;1]} nx^{n-1}=n$.
L'inégalité supposée impliquerait $n\leqslant C$ pour tout entier $n\geqslant 1$. C'est absurde.
Les normes k et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.