

Programme de colle – MPI*

1. Espaces vectoriels normés

Extrait du programme officiel :

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé. Distance associée à une norme. Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules. Parties, suites, fonctions bornées. Norme associée à un produit scalaire sur un espace pré-hilbertien réel. Normes $\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \ \cdot\ _\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Vecteurs unitaires. Inégalité triangulaire. On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Produit fini d'espaces vectoriels normés.	Notation $\ \cdot\ _\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$. Notations $\ \cdot\ _1$ et $\ \cdot\ _2$.
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

d) Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie. Voisinage d'un point. Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert. Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.
---	---

CONTENUS

Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A . Voisinage relatif.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E .
Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E .

j) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.

La démonstration n'est pas exigible.
La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

2. Séries vectorielles

L'objectif de cette section est d'étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Lien suite-série, séries télescopiques. Série absolument convergente. Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Divergence grossière. Le critère de Cauchy est hors programme.

Semaine prochaine : Suites et séries de fonctions.

3. Questions de cours

Les étudiants doivent savoir faire les exercices de la Banque CCINP 34, 37, 44, 45, 61 mais ne seront pas interrogés dessus.

- (i) Inégalité de Cauchy-Schwarz. Une norme euclidienne est une norme.
- (ii) Les normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ sont des normes.
- (iii) Norme N_∞ sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur un ensemble X non vide à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Normes N_1 et N_2 sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.
- (iv) Comparaisons (les 6) des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$, avec au moins un cas d'égalité pour chaque comparaison.
- (v) Comparaisons des normes usuelles sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

- (vi) 1-lipschitzianité de la fonction distance à une partie A dans un espace vectoriel normé.
Toutes les définitions concernant la topologie.
- (vii) L'adhérence est le plus petit fermé contenant la partie.
L'intérieur est le plus grand ouvert contenu dans la partie.
- (viii) Caractérisations séquentielles des fermés et des points adhérents.

(ix) **Exercice Classique : Suites de Cauchy et complétude**

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit que u est une **suite de Cauchy** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

Lorsque la réciproque est vraie, on dit que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est **complet**.

On dit aussi que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un **espace de Banach**.

2. Montrer que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est complet. Expliquer rapidement pourquoi c'est encore vrai pour un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
3. Montrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente à valeurs dans cet espace est convergente.

(x) **Exercice Classique : inégalités de Hölder, de Minkowsky et $\|\cdot\|_p$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}^+$, alors

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2. En déduire l'**inégalité de Hölder** sur $\mathbb{K}^n$

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

3. En déduire l'**inégalité de Minkowski**

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p},$$

puis que $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

4. Déterminer la limite de $\|x\|_p$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.