

CORRIGÉ DES EXERCICES * DE LA COLLE 3

1 Formule du crible

1. Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis. Montrer que

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \sum_{\emptyset \neq I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

2. Retrouver une formule donnant le nombre de surjections de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ en utilisant la formule du crible.
3. Retrouver une formule donnant le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ en utilisant la formule du crible.

Solution de 1 : Formule du crible

1. On considère, avec $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, l'application

$$\mathbb{1}_A = 1 - \mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i}) = - \sum_{\emptyset \neq I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{\emptyset \neq I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} (-1)^{|I|-1} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}.$$

En évaluant et sommant de part et d'autre pour $x \in A$, on obtient la formule.

2. Soit A_k l'ensemble des applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ n'atteignant pas la valeur k .

L'ensemble E des surjections de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est le complémentaire de $\bigcup_{k=1}^n A_k$, d'où

$$S_{p,n} = n^p - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^p = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^p = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

car pour chacune des $\binom{n}{k}$ parties à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$, le nombre d'applications ne prenant pas ces k valeurs fixées de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est $(n-k)^p$

On ne dispose pas de formule close pour $S_{p,n}$.

3. Pour les dérangements, il suffit de même de considérer A_i l'ensemble des permutations fixant l'entier i .

On obtient

$$|D_n| = n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

2 X - ENS Soit $d > 0$ et (z_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que, si $n \neq m$, $|z_n - z_m| \geq d$. Soit

$\alpha > 2$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

Solution de 2 : X - ENS

Quitte à changer z_n en $\frac{z_n}{\frac{d}{2}}$ ce qui ne change pas la nature de la série, on peut normaliser et supposer que

$$n \neq m \implies |z_n - z_m| \geq 2.$$

L'idée est de montrer qu'il y a « peu » de z_n dont le module est « petit »... Soyons plus précis, et comptons les z_n qui sont dans une couronne $I_p = \{k \in \mathbb{N}, p \leq |z_k| < p+1\}$: on définit $n(p) = |I_p|$.

Si $p \leq |z_k| < p+1$, $D(z_k, 1)$ est un disque inclus dans la couronne

$$C_p = \{z \in \mathbb{C}, p-1 \leq |z| \leq p+2\}$$

Soit $p \geq 1$. Il y a $n(p)$ tels disques, et ils sont disjoints. La somme de leurs aires est donc inférieure ou égale à l'aire de la couronne C_p , ce qui se traduit par

$$n(p) \times \pi \leq \pi(p+2)^2 - \pi(p-1)^2$$

d'où, en simplifiant un peu,

$$n(p) \leq 3(1+2p)$$

Il y a d'autre part au plus un n tel que $|z_n| < 1$.

On peut alors faire une sommation par paquets, tous les termes étant positifs. Dans $[0, +\infty[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^\alpha} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ |z_n| < 1}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ |z_n| \in [p, p+1[}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} \right) \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ |z_n| < 1}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n(p)}{p^\alpha} \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ |z_n| < 1}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} + 3 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2p+1}{p^\alpha} < +\infty$$

car $\frac{2p+1}{p^\alpha} \sim \frac{2}{p^{\alpha-1}}$ avec $\alpha-1 > 1$.

Donc $\sum \frac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

1. Pour quelles valeurs du réel α la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2}$ est-elle sommable ?
2. Démontrer que, pour tous m et n positifs, $\frac{1}{2}(m+n)^2 \leq m^2 + n^2 \leq (m+n)^2$.
3. Étudier la sommabilité de la suite double $\left(\frac{1}{(m+n)^\beta}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2}$ suivant les valeurs du réel β . Retrouver le résultat de la première question.

Solution de 3 :

1. Si $\alpha \leq 0$, pour tout $n \geq 1$, le terme général ne tend pas vers 0 quand $m \rightarrow +\infty$. La famille n'est donc pas sommable par divergence grossière.

Supposons désormais $\alpha > 0$. Les termes sont positifs. Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \right)$$

dans $[0, +\infty]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(t^2+n^2)^\alpha}$ est continue, positive et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Par comparaison série-intégrale,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+n^2)^\alpha} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \leq \frac{1}{(1+n^2)^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+n^2)^\alpha}.$$

Le changement de variable $t = nu$ donne

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+n^2)^\alpha} = \frac{1}{n^{2\alpha-1}} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1)^\alpha}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1)^\alpha}$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha > \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, $\int_{1/n}^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1)^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} C$ avec $C = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1)^\alpha} > 0$, d'où

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+n^2)^\alpha} \sim \frac{C}{n^{2\alpha-1}}.$$

Comme $\frac{1}{(1+n^2)^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$ dès que $\alpha > \frac{1}{2}$, on a $u_n \sim \frac{C}{n^{2\alpha-1}}$.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $2\alpha - 1 > 1$, soit $\alpha > 1$.

La famille est donc sommable si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Facile.
3. En sommant par diagonales. $D_p = \{(m, n) \in \mathbb{N}_*^2, m+n=p\}$ forme un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}_*^2$.

$\sum_{(m,n) \in D_p} \frac{1}{(m+n)^\beta} = \frac{|D_p|}{p^\beta} = \frac{p-1}{p^\beta} \sim \frac{1}{p^{\beta-1}}$ terme général de série convergente si et seulement si $\beta > 2$.

Or on a, pour $\alpha \geq 0$,

$$\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{(m+n)^{2\alpha}}.$$

L'inégalité de droite permet de conclure la sommabilité dans le cas où $\alpha > 1$ et celle de gauche la non sommabilité dans le cas où $\alpha \leq 1$.