

CORRIGÉ DE L'EXERCICE DE LA COLLE 3

1

Montrer que $\left(\frac{1}{m^2 + n^2}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2}$ n'est pas sommable de deux manières différentes : en utilisant une comparaison-intégrale, puis en se ramenant à $\left(\frac{1}{(m+n)^2}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2}$.

Solution de 1 :

- On utilise le théorème de Fubini dans sa version positive. Dans $[0, +\infty]$, on peut écrire

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2} \frac{1}{m^2 + n^2} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 + n^2}.$$

À $m \in \mathbb{N}$ fixé, la série à termes positifs $\sum_n \frac{1}{m^2 + n^2}$ converge par comparaison à une série de Riemann.

Soit $s_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 + n^2}$. Pourquoi a-t-on $\sum s_m$ divergente ?

On peut comparer à une intégrale, en refaisant le calcul ou en s'appuyant sur un dessin pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{m^2 + t^2} dt = \frac{1}{m} \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{m} \right) \right]_1^{+\infty} = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{m}}{m},$$

Pour tout $m \geq 1$, on a $\frac{1}{m} \leq 1$, d'où $\operatorname{Arctan} \frac{1}{m} \leq \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} \geq \frac{\pi}{4m},$$

ce dernier terme étant un terme général positif de série divergente.

On en déduit que, dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2} \frac{1}{m^2 + n^2} \geq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\pi}{4m} = +\infty.$$

- Autre solution : remarquer que $m^2 + n^2 \leq (m+n)^2$ donc $\frac{1}{m^2 + n^2} \geq \frac{1}{(m+n)^2}$ et vérifier que la famille de réels positifs $\left(\frac{1}{(m+n)^2}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2}$ n'est pas sommable.

En effet, par sommation par diagonale : $D_p = \{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2, m+n=p\}$ forme un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}_*^2$. Le cardinal de D_p s'obtient en choisissant $m \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ puis en remarquant qu'il n'y a qu'un seul choix pour $n : p-m$. Ainsi

$$\sum_{(m,n) \in D_p} \frac{1}{(m+n)^2} = \frac{|D_p|}{p^2} = \frac{p-1}{p^2} \sim \frac{1}{p}$$

terme général de série divergente.

On en déduit que, dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2} \frac{1}{m^2 + n^2} \geq \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2} \frac{1}{(m+n)^2} = +\infty.$$