

1. Nombre d'involutions

A. Énoncé

Déterminer le nombre de permutations σ de $\mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma^2 = \text{Id}$.

B. Solution

Notons I_n le nombre d'involutions de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq 1$. On va obtenir une expression de I_n en décrivant les permutations involutives. Celles-ci s'écrivent comme produit d'un certain nombre k de transpositions à supports disjoints avec $0 \leq 2k \leq n$. Comptons le nombre de permutations qui sont produit d'exactly k transpositions. On doit d'abord choisir les $2k$ éléments qui vont bouger ce qui peut être fait de $\binom{n}{2k}$ manières. On doit ensuite regrouper ces $2k$ éléments en k paquets de 2 pour former les k supports des transpositions. Supposons que les transpositions sont ordonnées. On a $\binom{2k}{2}$ manières de choisir la première, puis $\binom{2k-2}{2}$ manières de choisir la deuxième et ainsi de suite jusqu'à $\binom{2}{2} = 1$ manière de choisir la k -ième. Mais ici l'ordre ne compte pas car les transpositions commutent et il faut diviser le nombre total de possibilités par $k!$. On a donc finalement

$$I_n = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} \frac{1}{k!} \binom{2k}{2} \binom{2k-2}{2} \cdots \binom{2}{2} = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \frac{n!}{(n-2k)! k! 2^k}$$

On peut vérifier que $I_1 = 1$, $I_2 = 2$ et $I_3 = 4$ (les involutions sont dans ce cas l'identité et les trois transpositions).

2. Un problème de théorie extrémale des ensembles

A. Énoncé

Soit A un ensemble fini de cardinal $m \geq 2$ et $U_1, \dots, U_n$ des parties non vides deux à deux distinctes de A . On suppose qu'il existe un entier $a \geq 0$ tel que si $i \neq j$, $\text{Card}(U_i \cap U_j) = a$. Montrer que $n \leq m$.

B. Solution

Notons $x_1, \dots, x_m$ les éléments de A . On va traduire les relations d'appartenance des x_i aux ensembles U_j à l'aide d'une matrice, appelée matrice d'incidence. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ définie par $m_{ij} = 1$ si $x_i \in U_j$ et $m_{ij} = 0$ sinon. Regardons comment se traduisent les hypothèses sur cette matrice M . Pour $i \neq j$ on a

$$\text{Card}(U_i \cap U_j) = \sum_{k=1}^m m_{ki} m_{kj} = a$$

On reconnaît le terme (i, j) de la matrice $M^T M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En notant d_i le cardinal de U_i on a donc

$$H = M^T M = \begin{pmatrix} d_1 & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

On va montrer que cette matrice H est inversible. Cela permettra de conclure puisqu'alors

$$n = \text{rg}(H) \leq \text{rg}(M) \leq m$$

(par exemple en remarquant que $\text{Im } H \subset \text{Im } M^T$) fournit l'inégalité souhaitée.

Pour cela on va simplement calculer le déterminant de H , connu sous le nom de déterminant de Hurwitz. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et C la colonne dont tous les coefficients sont égaux à a . On a

$$\det H = \det(C + (d_1 - a)e_1, \dots, C + (d_n - a)e_n)$$

Si on développe $\det H$ par multilinéarité, on obtient

$$\prod_{i=1}^n (d_i - a) + \sum_{k=1}^n \det((d_1 - a)e_1, \dots, (d_{k-1} - a)e_{k-1}, C, (d_{k+1} - a)e_{k+1}, \dots, (d_n - a)e_n),$$

puisque les déterminants où la colonne C intervient deux fois ou plus sont nuls. On a donc

$$\det H = \prod_{i=1}^n (d_i - a) + a \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (d_j - a)$$

Or, pour tout i , on a $a \leq d_i$ (car $a = \text{Card}(U_i \cap U_j)$ pour tout $j \neq i$), avec égalité pour au plus un indice i (car les égalités $a = d_i = d_j$ impliquent $U_i \cap U_j = U_j$ et les ensembles U_i sont deux à deux distincts). Il en résulte que $\det H > 0$ et donc que H est inversible.

3. Étude de séries doubles

A. Énoncé

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls.

1. On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{n(n+1)}$ converge aussi. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$ existe et comparer sa valeur à $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

2. On suppose que $\sum \sqrt{n} a_n$ converge et on pose $w_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k^2$. Montrer l'existence de w_n et la convergence de la série $\sum \sqrt{\frac{w_n}{n}}$.

B. Solution

1. Pour $n \geq 1$ on a $\frac{a_n}{n(n+1)} \leq a_n$ et, par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{a_n}{n(n+1)}$ converge. Par le théorème de Fubini dans le cas positif, on peut alors écrire

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k a_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

La convergence de la série finale implique la convergence de la série considérée et l'égalité des deux sommes.

2. Si $n \geq 1$, $a_n \leq \sqrt{n} a_n$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ converge. En particulier, (a_n) tend vers 0. Donc, pour n assez grand, on a $0 \leq a_n \leq 1$ et dans ces conditions, $a_n^2 \leq a_n$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum a_n^2$ converge. L'existence de w_n est donc prouvée.

Remarquons que si $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille de réels positifs, on a $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$, ce qui s'écrit encore

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

On a donc pour $n \geq N$

$$\sqrt{\sum_{k=n}^N a_k^2} \leq \sum_{k=n}^N a_k$$

et en faisant tendre N vers l'infini on a

$$\sqrt{w_n} = \sqrt{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$$

On peut alors écrire, par le théorème de Fubini dans le cas positif

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{w_n}{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{n=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue, décroissante et intégrable sur $]0, k]$. Par conséquent

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \int_0^k \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{k}$$

Comme la série de terme $\sqrt{k} a_k$ converge, la somme de la série de terme $\sqrt{\frac{w_n}{n}}$ est finie.