

Programme de colle – MPI*

1. Dénombrement (MP2I)

Révisions du cours de dénombrement de MP2I (voir programme page suivante).

2. Dénombrabilité

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Les ensembles $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	La démonstration n'est pas exigible.

3. Sommabilité (officiellement MP2I mais traité cette année)

Extrait du programme officiel :

L'étude des familles sommables est menée dans un deuxième temps. On prolonge les calculs de sommes finies effectués en début d'année, en mettant en évidence un cadre permettant de sommer « en vrac » une famille infinie et procurant ainsi un grand confort de calcul. Dans le cas d'une famille positive, le calcul dans $[0, +\infty]$ se suffit à lui-même et contient l'étude de la sommabilité. Dans le cas d'une famille quelconque, il est préconisé de commencer par un calcul formel à justifier dans un second temps. On se concentre sur la pratique, qui jouera un rôle important en deuxième année.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Familles sommables de nombres réels positifs	
Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$. Borne supérieure dans $[0, +\infty]$.	La somme est notée $\sum_{i \in I} u_i$.
Somme d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i \in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I .	Cas où I est fini, où $I = \mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge.
La famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.	Invariance de la somme par permutation. On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.
Opérations : somme, multiplication par un réel positif. Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i \in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i$.	La démonstration est hors programme.
Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.	

Familles sommables de nombres complexes

La famille $(u_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est dite sommable si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$.

Notation $\ell^1(I)$.

Pour $I = \mathbb{N}$, lien avec les séries.

Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.

Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$, il existe une partie finie

F de I telle que $\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in F} a_i \right| \leq \varepsilon$.

Invariance de la somme par permutation.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes et soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Linéarité de la somme.

Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i.$$

Cas où I est un produit : théorème de Fubini.

Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_{i'})_{i' \in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i') \in I \times I'}$ est sommable et

$$\sum_{(i,i') \in I \times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{i' \in I'} b_{i'}.$$

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

La démonstration est hors programme.

Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.

On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Le programme de MPI sur le chapitre *Ensembles dénombrables* ajoute : « Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable. ».

Semaine prochaine : Structures algébriques.

4. Questions de cours

(i) Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ (on peut se contenter d'une preuve graphique), $\mathbb{Q}$. Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(ii) Linéarité de la somme d'une famille de réels positifs, sans passer par une énumération.

(iii) **Exercice classique : formule du crible**

Démontrer la formule du crible, et en déduire le nombre de surjections de $[1, p]$ dans $[1, n]$ et le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$.

(iv) **Exercice ENS**

Soit $d > 0$ et (z_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que, si $n \neq m$, $|z_n - z_m| \geq d$. Soit $\alpha > 2$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

(v) **Exercice classique**

(a) Pour quelles valeurs du réel α la famille $\left(\frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2}$ est-elle sommable ?

(b) Démontrer que, pour tous m et n positifs, $\frac{1}{2}(m+n)^2 \leq m^2 + n^2 \leq (m+n)^2$.

(c) Étudier la sommabilité de la suite double $\left(\frac{1}{(m+n)^\beta} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2}$ suivant les valeurs du réel β . Retrouver le résultat de la première question.

Les exercices de la banque **CCINP 84, 89, 104, 109, 112** sont à savoir faire mais les étudiants ne seront pas interrogés dessus.

5. Programme de MP2I

A. Dénombrement

Extrait du programme officiel :

- Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :
- ★ parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;
 - ★ l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $ A $, $\text{card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n . Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n .	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n . Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.