

Programme de colle – MPI

1. Dénombrement (MP2I)

Révisions du cours de dénombrement de MP2I (voir programme page suivante).

2. Dénombrabilité

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Les ensembles $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	La démonstration n'est pas exigible.

3. Sommabilité (officiellement MP2I mais traité cette année)

Extrait du programme officiel :

L'étude des familles sommables est menée dans un deuxième temps. On prolonge les calculs de sommes finies effectués en début d'année, en mettant en évidence un cadre permettant de sommer « en vrac » une famille infinie et procurant ainsi un grand confort de calcul. Dans le cas d'une famille positive, le calcul dans $[0, +\infty]$ se suffit à lui-même et contient l'étude de la sommabilité. Dans le cas d'une famille quelconque, il est préconisé de commencer par un calcul formel à justifier dans un second temps. On se concentre sur la pratique, qui jouera un rôle important en deuxième année.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Familles sommables de nombres réels positifs	
Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$. Borne supérieure dans $[0, +\infty]$. Somme d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i \in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I .	La somme est notée $\sum_{i \in I} u_i$. Cas où I est fini, où $I = \mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge. Invariance de la somme par permutation. On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.
La famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.	
Opérations : somme, multiplication par un réel positif. Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i \in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i$.	La démonstration est hors programme.
Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Familles sommables de nombres complexes	
La famille $(u_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est dite sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.	Notation $\ell^1(I)$. Pour $I = \mathbb{N}$, lien avec les séries. Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable. Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, il existe une partie finie F de I telle que $\left \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in F} a_i \right \leq \varepsilon$.
Somme d'une famille sommable de nombres complexes.	Invariance de la somme par permutation.
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $ u_i \leq v_i$. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable. Linéarité de la somme. Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i$. Cas où I est un produit : théorème de Fubini. Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_{i'})_{i' \in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i') \in I \times I'}$ est sommable et $\sum_{(i,i') \in I \times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{i' \in I'} b_{i'}$.	La démonstration est hors programme. Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Le programme de MPI sur le chapitre *Ensembles dénombrables* ajoute : « Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable. ».

Semaine prochaine : Structures algébriques.

4. Questions de cours

- (i) Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ (on peut se contenter d'une preuve graphique), $\mathbb{Q}$.
- (ii) Définition d'une famille (quelconque) sommable et de sa somme (cas réel positif, puis réel, puis complexe). Énoncé du théorème de sommation par paquets (cas général) et du théorème sur le produit de Cauchy.
- (iii) **Exercice classique**
Montrer que $\left(\frac{1}{m^2 + n^2} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2}$ n'est pas sommable de deux manières différentes : en utilisant une comparaison-intégrale, puis en se ramenant à $\left(\frac{1}{(m+n)^2} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}_*^2}$.
- (iv) **Exercices CCINP 84, 89, 104, 109, 112**

5. Exercices CCINP

■ CCINP 84

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

■ CCINP 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [1, n-1]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $s = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $s = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

■ CCINP 104

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X .
2. (a) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X=2)$.
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
3. (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
(b) Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Interpréter ce résultat.

■ CCINP 109

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .

■ CCINP 112 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

6. Programme de MP2I

A. Dénombrement

Extrait du programme officiel :

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- ★ parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;
- ★ l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $ A $, $\text{card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n . Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n .	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n . Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.