

1

Inégalité de Kolmogorov

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables.
Montrer que $(f')^2$ est intégrable et que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} f^2 \int_{\mathbb{R}} (f'')^2.$$

Montrer ensuite que f est uniformément continue, de limite nulle en $\pm\infty$.

Solution de 1 : Inégalité de Kolmogorov

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On peut écrire, par intégration par parties,

$$\int_0^x (f')^2 = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f f''.$$

- * Comme $(f')^2 \geq 0$, le théorème de la limite monotone indique que $\int_0^x (f')^2$ a une limite finie ou $+\infty$ en $+\infty$.
- * Par ailleurs, comme $|f f''| \leq \frac{1}{2}(f^2 + (f'')^2) \in L^1(\mathbb{R})$, on a $f f'' \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\int_0^x f f''$ a une limite finie en $+\infty$.
- * On en déduit que $f(x)f'(x) = \int_0^x (f')^2 + f(0)f'(0) + \int_0^x f f''$ a une limite ℓ finie ou $+\infty$ en $+\infty$.

On montre que nécessairement $\ell = 0$. Pour cela, on peut écrire

$$f^2(x) = f^2(0) + 2 \int_0^x f f'.$$

- En supposant que $\ell > 0$, et en posant $0 < a < \ell$, on a $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \geq A$, $f(t)f'(t) \geq a$, donc, pour $x \geq A$,

$$f^2(x) = f^2(0) + 2 \int_0^a f f' + 2 \int_a^x f f' \geq f^2(0) + 2 \int_0^a f f' + 2a(x-A) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $f^2 \in L^1(\mathbb{R})$.

- En supposant que $\ell < 0$, et en posant $\ell < a < 0$, on a $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \geq A$, $f(t)f'(t) \leq a$, donc, pour $x \geq A$,

$$f^2(x) = f^2(0) + 2 \int_0^a f f' + 2 \int_a^x f f' \leq f^2(0) + 2 \int_0^a f f' + 2a(x-A) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

ce qui est en contradiction avec la positivité de f^2 .

- * On a donc $f(x)f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, ce qui termine de justifier que $\int_0^{+\infty} (f')^2$ converge, donc, par positivité, $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$.
- * On montre exactement de la même manière que $f \in L^1(\mathbb{R}^-)$ et on obtient

$$f \in L^1(\mathbb{R}).$$

- Toujours par intégration par parties, on écrit, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_{-x}^x (f')^2 = f(x)f'(x) - f(-x)f'(-x) - \int_{-x}^x f f''$$

avec $ff' \xrightarrow{\pm\infty} 0$. On en tire

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ff''\right)^2.$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient, tous les termes existant bien,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (f'')^2.$$

- On a toujours $f^2(x) = f^2(0) + 2 \int_0^x ff'$ avec $|ff'| \leq \frac{1}{2}(f^2 + (f')^2) \in L^1(\mathbb{R})$ donc $ff' \in L^1(\mathbb{R})$. Donc f^2 a une limite en $\pm\infty$ qui ne peut être que nulle par intégrabilité de f^2 . Finalement,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

- On montre une extension du théorème de Heine. Les limites nulles en $\pm\infty$ fournissant $A < B$ tels que

$$\forall x \in]-\infty, A] \cup [B, +\infty[, \quad |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

La continuité de f sur le segment $[A-1, B+1]$ et le théorème de Heine fournissent un $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [A-1, B+1], \quad |x-y| \leq \eta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$

On pose $\delta = \min(\eta, 1) < 0$.

Alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| \leq \delta$, on a ou bien $x, y \in]-\infty, A]$, ou bien $x, y \in [A-1, B+1]$, ou bien $x, y \in [B, +\infty[$.

Dans les trois cas, $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

La fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2 Lemme de Riemann-Lebesgue

Si $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$, montrer que $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Solution de 2 : Lemme de Riemann-Lebesgue

C'est immédiat dans le cas d'une fonction constante (ou une fonction indicatrice).

On en déduit, par linéarité, le résultat sur les fonctions en escalier.

On utilise ensuite l'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonction en escalier.

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$ et $\varepsilon > 0$. On a $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ tel que $N_\infty(f - \varphi) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| = \left| \int_a^b (f(t) - \varphi(t)) \sin(nt) dt + \int_a^b \varphi(t) \sin(nt) dt \right| \leq N_\infty(f - \varphi)(b-a) + \left| \int_a^b \varphi(t) \sin(nt) dt \right|$$

Or $N_\infty(f - \varphi)(b-a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et par le cas des fonctions en escalier, on a un rang N à partir duquel

$$\left| \int_a^b \varphi(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, à partir du rang N , $\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \varepsilon$, ce qui conclut.

3 Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Déterminer un critère de convergence de la série $\sum x_n$.

Solution de 3 : Règle de Raabe-Duhamel

On a

$$\ln((n+1)^\alpha x_{n+1}) - \ln(n^\alpha x_n) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

terme général de série absolument convergente par comparaison à une série de Riemann positive et convergente, donc de série convergente.

On en déduit que la suite $(\ln(n^\alpha x_n))$ converge vers un réel ℓ donc que $n^\alpha x_n \rightarrow \lambda = e^\ell \neq 0$.

Ainsi, $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$ et par comparaison de séries à termes généraux positifs et critère de Riemann,

$$\sum x_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$