

1. Inégalité de Wirtinger

A. Énoncé

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que

$$I_1 = \int_0^1 f(t)f'(t)\cotan(\pi t)dt$$

et

$$I_2 = \int_0^1 \frac{f(t)^2}{\tan^2 \pi t} (1 + \tan^2 \pi t) dt$$

existent. Comparer I_1 et I_2 .

2. Montrer que pour tout $f \in E$, on a

$$\int_0^1 f'^2 \geq \pi^2 \int_0^1 f^2$$

(inégalité de Wirtinger).

3. Quels sont les cas d'égalité ?

(École polytechnique)

B. Solution

1. Commençons par justifier l'existence de I_1 . On a a priori un problème en 0 et en 1. Comme $f(0) = 0$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a en 0 le développement limité suivant $f(t) = f'(0)t + o(t)$. On sait que, toujours en 0, $\cotan \pi t \sim \frac{1}{\pi t}$. On a donc

$$f(t)f'(t)\cotan \pi t \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{f'(0)^2}{\pi}$$

La fonction intégrée se prolonge donc par continuité en 0. Il en est de même en 1 de sorte que I_1 est parfaitement défini. Pour l'intégrale I_2 , c'est pareil on vérifie que la fonction intégrée que l'on peut écrire $t \mapsto f(t)^2(1 + \cotan^2 \pi t)$ se prolonge par continuité en 0, 1 et $\frac{1}{2}$.

Pour comparer I_1 et I_2 , on effectue une intégration par parties dans I_1 .

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(t)f'(t)\cotan \pi t dt$ vaut

$$\left[\frac{1}{2} f^2(t) \cotan \pi t \right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} + \frac{\pi}{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f^2(t) (1 + \cotan^2 \pi t) dt$$

Si on fait tendre ε vers 0 il vient d'après ce qui précède

$$I_1 = \frac{\pi}{2} I_2$$

2. Soit $f \in E$ non nulle (si f est nulle l'inégalité est triviale). D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$I_1^2 \leq \int_0^1 (f'(t))^2 dt \int_0^1 (f(t))^2 \cotan^2 \pi t dt$$

Posons alors $I_2 = A + B$ avec $A = \int_0^1 f^2$ et $B = \int_0^1 (f(t))^2 \cotan^2 \pi t dt$. Alors, $I_2^2 = (A + B)^2 \geq 4AB$ (inégalité qui provient tout simplement du fait que $(A - B)^2 \geq 0$). On a donc

$$\int_0^1 f'^2 \geq \frac{I_1^2}{B} = \frac{\pi^2 I_2^2}{4B} \geq \pi^2 A = \pi^2 \int_0^1 f^2$$

C'est le résultat demandé.

3. On a égalité si et seulement si il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et si $A = B$. Soit $f \in E$ une fonction non nulle réalisant l'égalité. Il existe un réel λ tel que $f'(t) = \lambda f(t) \cotan \pi t$ pour tout $t \in]0, 1[$. Alors, on a

$$k^2 \int_0^1 f(t)^2 \cotan^2 \pi t dt = \int_0^1 f'^2 = \pi^2 \int_0^1 f^2 = \pi^2 \int_0^1 f(t)^2 \cotan^2 \pi t dt$$

et on en déduit que $k^2 = \pi^2$.

★ Si $k = \pi$, les solutions de l'équation $f'(t) = k f(t) \cotan \pi t$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto A \sin \pi t$, $A \in \mathbb{R}$. Elles sont dans E et vérifient toutes le cas d'égalité.

★ Si $k = -\pi$, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $t \mapsto \frac{A}{\sin \pi t}$. Il ne s'agit pas d'éléments de E .

De la linéarité de l'intégrale, il résulte notamment que l'application $(f, g) \mapsto \int_0^1 f g$ est une forme bilinéaire symétrique positive. C'est même un produit scalaire.

2. Nature d'une série explicite

A. Énoncé

Quelle est la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln n \ln(n+2)}\right)$?

B. Solution

Observons pour commencer que la série est à termes positifs. On a

$$u_n = \ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln n \ln(n+2)}\right) = 2 \ln \ln(n+1) - \ln \ln n - \ln \ln(n+2) \geq 0$$

par concavité de la fonction $t \mapsto \ln \ln t$. On va maintenant estimer u_n par un développement asymptotique. Posons $u_n = \ln v_n$. On peut écrire, pour n tendant vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\left[\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^2}{\ln n \left[\ln n + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right]} = \frac{\left[\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\ln n \left[\ln n + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]} \\ &= \frac{\left[1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right]^2}{1 + \frac{2}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)} = \left(1 + \frac{2}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right) \times \left(1 - \frac{2}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right) \\ &= 1 + o\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right) \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$u_n = \ln v_n = \ln\left(1 + o\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)\right) = o\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge (son terme général est par exemple négligeable devant $\frac{1}{n^{3/2}}$), le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure la convergence de la série étudiée.

En fait on peut même calculer sa somme, comme le lecteur l'aura peut-être fait. Il suffit de constater que dans la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=2}^n (2 \ln \ln(k+1) - \ln \ln k - \ln \ln(k+2))$$

la plupart des termes s'éliminent car on a une somme télescopique en écrivant

$$2 \ln \ln(k+1) - \ln \ln k - \ln \ln(k+2) = (\ln \ln(k+1) - \ln \ln k) - (\ln \ln(k+2) - \ln \ln(k+1)).$$

On obtient

$$S_n = \ln \ln(n+1) - \ln \ln(n+2) + \ln \ln 3 - \ln \ln 2$$

qui tend vers $\ln \ln 3 - \ln \ln 2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Égalité de deux sommes

A. Énoncé

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite positive décroissante qui converge vers 0.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature.

Dans le cas de la convergence, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$$

B. Solution

Notons que les séries en question sont à termes positifs. Posons pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k+1})$$

On a, pour $n \geq 1$,

$$T_n = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=1}^n k u_{k+1} = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k$$

$$= \sum_{k=1}^n (k - (k-1))u_k + (1-1)u_1 - n u_{n+1} = S_n - n u_{n+1}$$

Le calcul effectué ci-dessus est une transformation d'Abel. Le lecteur se reportera page 262 et aux exercices qui suivent pour plus d'information sur cette technique importante.

On peut alors prouver l'équivalence.

- ★ Supposons que $\sum u_k$ converge et notons S sa somme. Dans ces conditions, on a $T_n \leq S_n \leq S$ pour tout entier n . Donc, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont majorées par S . Cette série converge et sa somme T est, par passage à la limite dans l'inégalité $T_n \leq S$, inférieure ou égale à S .
- ★ Réciproquement, supposons que $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge et notons T sa somme. Posons $v_k = k(u_k - u_{k+1})$. On va montrer que la suite $n u_{n+1}$ tend vers 0, ce qui impliquera à la fois la convergence de la série $\sum u_n$ et le fait que les deux séries ont la même somme d'après l'identité $T_n = S_n - n u_{n+1}$. On a pour tout entier $k \geq 1$, $u_k - u_{k+1} = \frac{v_k}{k}$, ce qui donne, puisque u_n tend vers 0,

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k}$$

On en déduit que $0 \leq n u_{n+1} \leq n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$, quantité qui tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente. La limite de $n u_{n+1}$ est donc nulle.

On conclut que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et, en cas de convergence, elles ont la même somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$$