

Programme de colle – MPI*

1. Intégrales généralisées

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$. Intégrale convergente en $+\infty$. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue. Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.
Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.	
Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$.	
Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a, +\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} f $ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, +\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ». Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$. Un calcul montrant que $\int_I f < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité. Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$:	
★ si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f ;	
★ si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f .	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$. Intégrale convergente en b , en a . Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles. Intégration par parties sur un intervalle quelconque :	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.
$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$	
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	
Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, b]$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b , en a . Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.
Espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$. Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle. Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.	
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{ x-a ^\alpha} dx$.	La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.
Intégration des relations de comparaison	
Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est réelle de signe constant.

Pour les intégrations par parties sur des intervalles quelconques : on revient systématiquement sur un segment.

2. Séries numériques

On se contente pour le moment de séries numériques.

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d’une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d’une série convergente tend vers 0. Lien suite-série, séries télescopiques. Série absolument convergente.	Divergence grossière.
Une série absolument convergente d’éléments d’un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d’une fonction monotone.
Règle de d’Alembert. Somme des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.	La suite de référence est de signe constant à partir d’un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

Semaine prochaine : Dénombrement. Dénombrabilité. Familles sommables.

3. Questions de cours

- (i) ■ Exemple de fonction intégrable au voisinage de $+\infty$, ne tendant pas vers 0, voire non bornée (pas d’expression attendue de la fonction : on se contente d’une description graphique très précise).
■ Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- (ii) **Intégrales de Wallis** : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$: relation de récurrence, monotonie, $(n I_n I_{n-1})$ est constante, équivalent.
- (iii) **Intégrale de Dirichlet** : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente et vaut $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ mais $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n’est pas absolument convergente.
- (iv) **Formule de Stirling** : utilisation des séries pour obtenir $n! \sim K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.
Expression de l’intégrale de Wallis I_{2n} à partir de la formule de récurrence **admise** $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
À l’aide de l’équivalent **admis** $I_{2n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$, on en déduit K .

- (v) Démontrer le **théorème de sommation des relations de comparaison** dans le cas de divergence (au choix pour les intégrales ou pour les séries).
Application du cas discret au théorème de Cesàro (cas fini et infini).
- (vi) **Théorème spécial sur les séries alternées** démontré avec une transformation d’Abel.
Majoration et signe des restes.

- (vii) **Exercice classique : intégrales et séries de Bertrand**
Critère de convergence de $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a \ln^\beta t}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^a \ln^\beta n}$ portant sur les réels a et β .
- (viii) **Exercice classique : inégalité de Kolmogorov**
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables.
Montrer que $(f')^2$ est intégrable et que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2\right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} f^2 \int_{\mathbb{R}} (f'')^2.$$

- Montrer ensuite que f est uniformément continue, de limite nulle en $\pm\infty$.
- (ix) **Exercices classiques**
 - (a) **Lemme de Riemann-Lebesgue** : Si $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$, montrer que $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - (b) **Règle de Raabe-Duhamel** : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle qu’il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Déterminer un critère de convergence de la série $\sum x_n$.

Les étudiants doivent savoir faire les exercices de la banque CCINP 5, 6, 7, 8, 28, 29, 46 mais ne seront pas interrogés dessus.

4. Programme de MP2I

A. Séries	CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence et divergence		
	Sommes partielles d’une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
	Linéarité de la somme. Le terme général d’une série convergente tend vers 0. Reste d’une série convergente. Lien suite-série.	Divergence grossière.
	Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
	Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	
b) Séries à termes positifs ou nuls		
	Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n , la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.
Séries de Riemann.

Application à l'étude de sommes partielles.

c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

Une série numérique absolument convergente est convergente.

Le critère de Cauchy est hors programme.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

d) Théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.
