

Programme de colle – MPI

1. Intégrales généralisées

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$. Intégrale convergente en $+\infty$. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue. Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.
Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.	
Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$.	
Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a, +\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} f $ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, +\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ». Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$. Un calcul montrant que $\int_I f < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité. Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$:	
★ si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f ;	
★ si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f .	

Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.

Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$.

Intégrale convergente en b , en a .

Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente.

Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.

Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, b]$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».

Fonction intégrable en b , en a .

Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.

Espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.

Inégalité triangulaire.

Si f est continue et intégrable sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et

si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx$.

La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.

La fonction de référence est réelle de signe constant.

Pour les intégrations par parties sur des intervalles quelconques : on revient systématiquement sur un segment.

2. Séries numériques

On se contente pour le moment de **séries numériques**.

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Lien suite-série, séries télescopiques. Série absolument convergente. Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Divergence grossière. Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.
Règle de d'Alembert. Somme des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.	La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

Semaine prochaine : Dénombrement. Dénombrabilité. Familles sommables.

3. Questions de cours

- Formulaire de développements limités :** $\exp, \cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}, (1+x)^\alpha, \frac{1}{1 \pm x}, \ln(1 \pm x), \operatorname{Arctan}$ à tous ordres ; $\tan$ et th à l'ordre 7.
- Intégrales de Wallis :** $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$: relation de récurrence, monotonie, $(n I_n I_{n-1})$ est constante, équivalent.
- Un calcul de primitive d'une fonction rationnelle de la forme $\frac{\alpha x + \beta}{a x^2 + b x + c}$ où α, β, a, b, c sont des réels tels que $b^2 - 4ac < 0$ au choix du colleur.
- Exemple de fonction intégrable au voisinage de $+\infty$, ne tendant pas vers 0, voire non bornée (pas d'expression attendue de la fonction : on se contente d'une description graphique très précise).
- Formule de Stirling :** utilisation des séries pour obtenir $n! \sim K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.
Expression de l'intégrale de Wallis I_{2n} à partir de la formule de récurrence **admise** $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
À l'aide de l'équivalent **admis** $I_{2n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$, on en déduit K .

- Développement asymptotique de la série harmonique :** $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Application au calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

- Énoncer les théorèmes de sommation des relations de comparaison dans le cas de convergence et de divergence. Application au théorème de Cesàro (cas fini et infini).
- Exercices CCINP : 5, 6, 7, 8, 28, 29, 46**

4. Exercices CCINP

■ CCINP 5 : Série de Bertrand particulière

- On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Cas $\alpha \leq 0$:** En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.
- Cas $\alpha > 0$:** Étudier la nature de la série.

Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

- Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 3} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

■ CCINP 6 : Critère de d'Alembert (à énoncer avant de traiter l'exercice)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

- Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

- Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

■ CCINP 7 :

- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
Montrer que $u_n \sim_{+\infty} v_n \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

- Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)}$.

Remarque : i est ici le nombre complexe de carré égal à -1

■ CCINP 8 : Théorème spécial sur des séries alternées (à énoncer avant de traiter l'exercice)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

- Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

- b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. Étudier la convergence simple-sur pour $x \in \mathbb{R}$ fixé de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
- **CCINP 28** : *N.B. : les deux questions sont indépendantes.*
- La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
 - Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?
- **CCINP 29** :
- On pose $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$.
- Démontrer que $\forall x \in]0, +\infty[, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.$
- On pose alors $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.
- Pour tout $x \in]0, +\infty[, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.$
 - Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.
- **CCINP 46** : On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2+n+1})$.
- Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi \sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
 - En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2+n+1})$ converge.
 - $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2+n+1})$ converge-t-elle absolument ?

5. Programme de MP2I

A. Séries

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Reste d'une série convergente. Lien suite-série.	Divergence grossière. La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	

b) Séries à termes positifs ou nuls

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n , la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.
Séries de Riemann.

Application à l'étude de sommes partielles.

c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

Une série numérique absolument convergente est convergente.

Le critère de Cauchy est hors programme.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

d) Théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.