

1. Récurrences simultanées

A. Énoncé

On se donne trois réels a_0, b_0, c_0 tels que $-1 \leq a_0 \leq b_0 \leq c_0 \leq 1$ et on pose, pour tout entier naturel n , le système

$$\begin{cases} a_{n+1} = \int_{-1}^1 \min(x, b_n, c_n) dx \\ b_{n+1} = \int_{-1}^1 \text{mil}(x, a_n, c_n) dx \\ c_{n+1} = \int_{-1}^1 \max(x, a_n, b_n) dx \end{cases}$$

où $\text{mil}(a, b, c)$ est le terme médian de (a, b, c) . Étudier la convergence des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

B. Solution

Montrons, par récurrence sur n , que $a_n \leq b_n \leq c_n$. C'est vérifié pour $n = 0$ et si on suppose que la propriété est vraie au rang n , on obtient pour tout $x \in [-1, 1]$ les relations suivantes.

- si $x \leq a_n$, $\min(x, b_n, c_n) = x \leq a_n = \text{mil}(x, a_n, c_n) \leq \max(x, a_n, b_n) = b_n$
- si $a_n \leq x \leq c_n$, $\min(x, b_n, c_n) \leq x = \text{mil}(x, a_n, c_n) \leq \max(x, a_n, b_n)$
- si $x \geq c_n$, $\min(x, b_n, c_n) = b_n \leq c_n = \text{mil}(x, a_n, c_n) \leq x = \max(x, a_n, b_n)$

On a donc pour tout $x \in [-1, 1]$ l'encadrement

$$\min(x, b_n, c_n) \leq \text{mil}(x, a_n, c_n) \leq \max(x, a_n, b_n)$$

On en déduit en intégrant ces inégalités sur $[-1, 1]$ la relation

$$a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq c_{n+1}$$

ce qui termine la récurrence.

On aimerait pouvoir dire que pour tout n , $-1 \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq 1$. Il n'en est rien. Si par exemple $b_0 = -1$, alors $a_0 = -2$. Nous allons cependant montrer que c'est réalisé pour n assez grand. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ la majoration $a_{n+1} \leq \int_{-1}^1 x dx = 0$ et de même $c_{n+1} \geq 0$. Autrement dit, $a_n \leq 0$ et $c_n \geq 0$ pour $n \geq 1$. On en déduit que pour $n \geq 1$ on a

$$b_{n+1} + 1 = \int_{-1}^1 \text{mil}(x+1, a_n+1, c_n+1) dx \geq 0$$

car $c_n + 1 > 0$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, $x+1 \geq 0$. On montre de même que $b_{n+1} - 1 \leq 0$. On a donc $b_{n+1} \in [-1, 1]$ pour $n \geq 1$, soit $b_n \in [-1, 1]$ pour $n \geq 2$. On peut donc écrire pour $n \geq 2$ la suite d'égalités

$$a_{n+1} = \int_{-1}^1 \min(x, b_n) dx = \int_{-1}^{b_n} x dx + \int_{b_n}^1 b_n dx = \frac{1}{2}(b_n^2 - 1) + b_n(1 - b_n) = -\frac{(1 - b_n)^2}{2}$$

On trouve de même

$$c_{n+1} = \int_{-1}^{b_n} b_n dx + \int_{b_n}^1 x dx = \frac{(b_n + 1)^2}{2}$$

Soit un entier $n \geq 2$. Les conditions $a_{n+1} \geq -1$ et $c_{n+1} \leq 1$ sont réalisées si $|b_n| \leq \sqrt{2} - 1$. On note que $|c_{n+1}| + |a_{n+1}| = c_{n+1} - a_{n+1} = 1 + b_n^2 \leq 2$. On ne peut pas avoir simultanément $a_{n+1} < -1$ et $c_{n+1} > 1$. Si $|b_n| \leq \sqrt{2} - 1$ alors on obtient

$$b_{n+2} = \int_{-1}^{a_{n+1}} a_{n+1} dx + \int_{a_{n+1}}^{c_{n+1}} x dx + \int_{c_{n+1}}^1 c_{n+1} dx = \frac{1}{2}(a_{n+1} + c_{n+1})(a_{n+1} - c_{n+1} + 2) = b_n(1 - b_n^2)$$

On a alors $|b_{n+2}| \leq |b_n| \leq \sqrt{2} - 1$. Si $b_n > \sqrt{2} - 1$, alors $c_{n+1} > 1$ et l'on calcule

$$b_{n+2} = \int_{-1}^1 \max(x, a_{n+1}) dx = \int_{-1}^{a_{n+1}} a_{n+1} dx + \int_{a_{n+1}}^1 x dx = a_{n+1}(a_{n+1} + 1) + \frac{1}{2}(1 - a_{n+1}^2) = \frac{(a_{n+1} + 1)^2}{2}$$

On en déduit $b_{n+2} \in [0, 1/2]$, puis $a_{n+3} = -\frac{(1 - b_{n+2})^2}{2} \in [-1/2, -1/8]$. Si on a encore $b_{n+2} > \sqrt{2} - 1$, alors on obtient l'égalité

$b_{n+4} = \frac{(a_{n+3} + 1)^2}{2}$ et cette fois on a l'encadrement $0 \leq b_{n+4} \leq \frac{49}{128} \leq \sqrt{2} - 1$. On montre de même que si $b_n < -\sqrt{2} + 1$ alors $-\sqrt{2} + 1 \leq b_{n+4} \leq 0$. On a donc pour tout n assez grand ($n \geq 6$) les propriétés

$$|b_n| \leq \sqrt{2} - 1, \quad b_{n+2} = b_n(1 - b_n^2) \quad \text{et} \quad |b_{n+2}| \leq |b_n|$$

Les deux suites $(|b_{2n}|)$ et $(|b_{2n+1}|)$ sont donc décroissantes et bornées. Elles convergent. La limite de chacune vérifie $l = l(1 - l^2)$ et donc $l = 0$. La suite (b_n) converge donc vers 0. Des relations $a_{n+1} = -\frac{(1 - b_n)^2}{2}$ et $c_{n+1} = \frac{(b_n + 1)^2}{2}$, on déduit que les suites (a_n) et (c_n) convergent respectivement vers $-1/2$ et $1/2$.

2. Lemme de Fekete

A. Énoncé

Soit $u = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ pour tout couple (m, n) d'entiers naturels. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers $\ell = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

B. Solution

De l'hypothèse, on déduit que pour tout entier n , on a $u_{2n} \leq 2u_n$, puis par une récurrence sur m , que $u_{mn} \leq m u_n$, pour m et n dans $\mathbb{N}^*$.

Commençons par le cas où ℓ est réel. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver m tel que $\ell \leq \frac{u_m}{m} \leq \ell + \varepsilon$.

D'après la remarque précédente on a alors $\ell \leq \frac{u_{qm}}{qm} \leq \ell + \varepsilon$ pour tout entier $q \geq 1$.

Si n est un entier quelconque, on en fait la division euclidienne par m et on obtient $n = qm + r$, où $0 \leq r < m$.

On a alors $u_n \leq u_{mq} + u_r \leq q u_m + u_r$ et donc en divisant par n on trouve

$$\ell \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{q}{n} u_m + \frac{u_r}{n} \leq \frac{(\ell + \varepsilon) q m}{n} + \frac{M}{n} \leq (\ell + \varepsilon) \left(1 - \frac{r}{n}\right) + \frac{M}{n}$$

où $M = \max_{0 \leq k < m} u_k$. Puisque $0 \leq r < m$, $\frac{r}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et donc $(\ell + \varepsilon) \left(1 - \frac{r}{n}\right) + \frac{M}{n}$ tend vers $\ell + \varepsilon$.

On a donc pour n assez grand la double inégalité

$$\ell \leq \frac{u_n}{n} \leq \ell + 2\varepsilon$$

ce qui prouve que $\frac{u_n}{n} \rightarrow \ell$.

Le cas où $\ell = -\infty$ se traite de même. Pour tout $A < 0$, il existe m tel que $\frac{u_m}{m} \leq A$. On obtient comme précédemment pour n assez grand la majoration

$$\frac{u_n}{n} \leq A \left(1 - \frac{r}{n}\right) + \frac{M}{n} \leq \frac{A}{2}$$

3. Continuité au sens de Cesàro

A. Énoncé

On dit que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue au sens de Cesàro en a si pour toute suite $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on a l'implication

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow a \implies \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \rightarrow f(a)$$

Déterminer les fonctions continues au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.

B. Solution

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.

Quitte à retrancher à f la constante $f(0)$ on peut supposer que $f(0) = 0$.

Soit x et y deux réels. Considérons la suite (u_n) qui prend alternativement les valeurs x et y .

On pose $u_{2p} = x$ et $u_{2p+1} = y$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Il est aisé de voir que (u_n) converge en moyenne vers $\frac{x+y}{2}$ et que de

même on a la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u_1) + \dots + f(u_n)}{n} = \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

Grâce à l'hypothèse on a donc l'égalité

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En prenant $y = 0$ on obtient

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$$

pour tout réel x . Par suite f est additive, c'est-à-dire vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout couple (x, y) .

Il est classique d'en déduire que f est $\mathbb{Q}$ -linéaire. On a donc $f(r) = f(1)r$ pour tout rationnel r .

Si x est un réel quelconque, on peut trouver une suite de rationnels $(r_n)_{n \geq 1}$ qui converge vers x .

Par le théorème de Cesàro, cette suite converge aussi vers x en moyenne et on a donc

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(r_1) + \dots + f(r_n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(1) \frac{r_1 + \dots + r_n}{n} = f(1)x$$

On en déduit que f est linéaire. Par conséquent, on a montré qu'une fonction continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$ est nécessairement une fonction affine.

Réciproquement, il est clair que toutes les fonctions affines sont continues au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.