

X-ENS Maths A

2024

Première partie

1. a. - $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathbb{R}$ -diagonalisable par théorème spectral.

$$-M_0 = \begin{pmatrix} 0 & & (-1) \\ & \ddots & \\ (-1) & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad -M_0 - I_n = \begin{pmatrix} -1 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & -1 \end{pmatrix}$$

et de rang 1. Donc $1 \in \text{Sp}(M_0)$

et $E_1(-M_0)$ de dimension $n-1$ contient les $n-1$ vecteurs indépendants $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } E_1(-M_0) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Puis, $-M_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (1-n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, la valeur propre étant nécessairement simple, le sous-espace propre est une droite :

$$E_{1-n}(-M_0) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Donc } \text{Sp}(-M_0) = \{1, 1-n\}.$$

1. b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En diagonalisant,

$$M_x = M_0 + x I_n = P \begin{pmatrix} -1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & -1 & \\ & & & n-1 \end{pmatrix} P^{-1} + x I_n$$

$$= P \begin{pmatrix} x-1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & x-1 & \\ & & & x+n-1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{où } P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

donc $\det M_x = (x-1)^{n-1} (x+n-1)$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) [M_x]_{\sigma(1),1} \cdots [M_x]_{\sigma(n),n}$$

$= 1$ si $\sigma(j)=j$, x sinon !
Il y a donc exactement $v(\sigma)$ termes qui valent x

$$(x-1)^{n-1} (x+n-1) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{v(\sigma)}$$

2. Notons $P_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{v(\sigma)} = (x-1)^{n-1} (x+n-1)$

Alors $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = P_n(1) = 0$ car $n \geq 2$.

Puis $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) v(\sigma) = P'_n(1)$

Avec $P_n'(1) = 0$ si $n-1 \geq 2$ (1 valeur d'ordre ≥ 2 de P_n) et $P_2 = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

donc $P_2'(1) = 2$

donc
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) v(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 3 \\ 2 & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

Enfin
$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{v(\sigma) + 1} &= \int_0^1 P_n(x) dx \\ &= \int_0^1 (x-1)^{n-1} (x+n-1) dx \\ &= \left[\frac{(x-1)^n}{n} (x+n-1) \right]_0^1 \\ &\quad - \frac{1}{n} \int_0^1 (x-1)^n dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} (-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n-1)(n+1) + 1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

donc
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{v(\sigma) + 1} = \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n(n+1)}.$$

3. Soit $\mathcal{Y}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon(\sigma) = 1\}$

Alors
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathcal{Y}_n} \varepsilon(\sigma) + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathcal{Y}_n} \varepsilon(\sigma) = |\mathcal{Y}_n| - |\mathfrak{S}_n \setminus \mathcal{Y}_n| = 0 \text{ d'après 2}$$

donc $|A_n| = |\mathcal{S}_n \setminus A_n| = \frac{n!}{2}$ Car, de plus, $|A_n| + |\mathcal{S}_n \setminus A_n| = |\mathcal{S}_n| = n!$

A_n est l'événement « La permutation tirée au hasard est paire » sur l'univers $(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}(\mathcal{S}_n), \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ uniforme.

Alors $\mathbb{P}(A_n) = \frac{|A_n|}{|\mathcal{S}_n|} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\mathcal{S}_n \setminus A_n) = \frac{1}{2}$.

4. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. $\sigma \in \mathcal{D}_n \Leftrightarrow v(\sigma) = 0$.

En reprenant les notations de 2,

$$P_n(0) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) 0^{v(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \varepsilon(\sigma)$$

$$= |A_n \cap \mathcal{D}_n| - |\mathcal{D}_n \setminus A_n|$$

$$= (0-1)^{n-1} (0+n-1)$$

Donc $|A_n \cap \mathcal{D}_n| = |\mathcal{D}_n \setminus A_n| + (-1)^{n-1} (n-1)$.

5. a) $(1, X, \dots, X^m)$ et $(1, X-1, \dots, (X-1)^m)$ sont des familles de $m+1 = \dim(\mathbb{R}_m[X])$ polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$ non nuls, à degrés étagés.

Ce sont donc des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

5. b)

$$\forall j \in \mathbb{I} 0, m \mathbb{I}, X^j = (X-1+1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (X-1)^i$$

par la formule du binôme de Newton.

Donc $\text{Mat}_{(1, X, \dots, X^m), (1, X-1, \dots, (X-1)^m)} \left(\text{id}_{\mathbb{R}_m[X]} \right)$

$$= \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \binom{m}{0} \\ & \binom{1}{1} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & \binom{m}{m} \end{pmatrix} = M^T$$

Sc - Comme $\text{id}_{\mathbb{R}_m[X]} \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}_m[X])$, $M^T \in \mathcal{GL}_m(\mathbb{R})$

donc $M \in \mathcal{GL}_m(\mathbb{R})$, et $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$

$$= \text{Mat}_{(1, X-1, \dots, (X-1)^m), (1, X, \dots, X^m)} \left(\text{id}_{\mathbb{R}_m[X]} \right)$$

Or $\forall j \in \mathbb{I} 0, m \mathbb{I}$,

$$(X-1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i$$

donc $(M^{-1})^T =$

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & & \vdots & (-1)^m \binom{m}{0} \\ & \binom{1}{1} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ (0) & & & -\binom{m-1}{m} & \binom{m}{m} \end{pmatrix}$$

d'où
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & & & \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ (-1)^{\frac{m}{m}} \binom{m}{0} & \dots & & -\binom{m}{m-1} \binom{m}{m} \end{pmatrix}$$

ie $\forall i, j \in \mathbb{I}0, m\mathbb{D}, \quad [M^{-1}]_{i,j} = (-1)^{i-j} \binom{i}{j}$

(en numérotant lignes et colonnes à partir de 0...)
 $\rightarrow$ pas choquant à MPI !

5.d On suppose que

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

donc, $\forall k \leq m,$

$$v_k = \sum_{l=0}^m [M^{-1}]_{k,l} u_l = \sum_{l=0}^m (-1)^{l-k} \binom{k}{l} u_l$$

$= 0$ si $l > k$
 donc formule valable
 pour $l \in \mathbb{I}0, m\mathbb{D}$

ie

$$v_k = \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \binom{k}{l} u_l.$$

6- On veut dénombrer les dérangements de S_n .

On cherche une relation de récurrence pour utiliser la question précédente.

Pour cela, classons les permutations de S_n en fonction de leur nombre de points fixes $v(\sigma)$.

Soit $F_k = \{\sigma \in S_n, v(\sigma) = k\} = v^{-1}(\{k\})$.

Alors $S_n = \bigsqcup_{k=0}^n F_k$ donc

$$n! = \sum_{k=0}^n |F_k|$$

Or pour choisir une permutation ayant k points fixes, on choisit ces points : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités, puis on permute sans point fixes les $n-k$ autres valeurs : il y a D_{n-k} possibilités.

Ainsi, $|F_k| = \binom{n}{k} D_{n-k}$

Puis
$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} D_k$$

avec un changement d'indice.

Comme c'est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $D_0 = 1$.

D'après la question précédente, on en tire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

ie
$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$
 après changement d'indice.

7. a $\gamma_n(\mathcal{D}_n) = \{-1, 1\}$ et d'après 4,

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{|(Y_n = 1)|}{D_n} = \frac{|(Y_n = -1)| + (-1)^{n-1}(n-1)}{D_n}$$

$$= \mathbb{P}(Y_n = -1) + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n}$$

$$= 1 - \mathbb{P}(Y_n = 1) + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n}$$

donc
$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n}$$

et
$$\mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{D_n}$$

7. b) Or $\frac{n-1}{D_n} = \frac{n-1}{n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{(n-1)!}$

donc $\frac{n-1}{D_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

donc $\boxed{\mathbb{P}(Y_n = \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} \text{ for } \varepsilon \in \{-1, 1\}}$

8. a) $\boxed{Z_n(\mathcal{G}_n) = \mathbb{I}_{0, n} \mathbb{I}}$

Si $k \in \mathbb{I}_{0, n} \mathbb{I}$, $\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{|\nu^{-1}(\{k\})|}{n!} \stackrel{\text{cb 6.}}{=} \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!}$

$$= \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}}$ d'après 6.

8 b) donc $\boxed{\mathbb{P}(Z_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{1}{e k!}}$

8 c) Avec ce qui précède,

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{(-1)^j}{j!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} - \frac{1}{n!} \times \frac{(-1)^0}{0!} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Z_n = k) - \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \\
&= 1 - \frac{0^n}{n!}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.}$

Mais il y a beaucoup plus simple. Soit A_k la variable aléatoire telle que $A_k(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k)=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $\mathbb{P}(A_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ (k est fixe, les autres sont permutés)

Donc $A_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Mais $Z_n = A_1 + \dots + A_n$ donc

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(A_1) + \dots + \mathbb{E}(A_n) = n \times \frac{1}{n}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.}$

9- $\mathcal{G}_2 = \{\text{id}, (12)\}$

$$\frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_2} \omega(\sigma) = \frac{1}{2} (\omega(\text{id}) + \omega((12))) = \frac{1}{2} (2 + 1) = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$S_3 = \{id, (12), (23), (13), (123), (132)\}$$

$$\frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \omega(\sigma) = \frac{1}{6} (3 + 2 \times 3 + 1 \times 2) = \boxed{\frac{11}{6}}$$

Dans S_4 , il ya

- l'identité $\rightarrow \omega(\sigma) = 4$
- $\binom{4}{2} = 6$ transpositions $\rightarrow \omega(\sigma) = 3$
- $\binom{4}{3} \times 2 = 8$ 3-cycles $\rightarrow \omega(\sigma) = 2$
- $3! = 6$ 4-cycles $\rightarrow \omega(\sigma) = 1$
- 3 produit de 2 transpositions à supports disjoints $\rightarrow \omega(\sigma) = 2$

Ce qui fait bien $24 = 4!$ permutations.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{1}{4!} \sum_{\sigma \in S_4} \omega(\sigma) &= \frac{1}{24} [4 + 6 \times 3 + 8 \times 2 + 6 \times 1 + 3 \times 2] \\ &= \frac{50}{24} = \boxed{\frac{25}{12}} \end{aligned}$$

10- $s(n, n) = 1$ car seule l'identité peut posséder n orbites.

$s(n, 1) = (n-1)!$ car les permutations avec une seule orbite sont les permutations circulaires $(n \ i_1 \dots i_{n-1})$ avec $i_1, \dots, i_{n-1}$ correspondant à n'importe quelle permutation de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

On cherche le nombre de permutation $\sigma \in S_n$ telles que $\omega(\sigma) = k$.

- Soit $\sigma(1) = 1$ ie 1 est fixe par σ et constitue

à lui tout seul une orbite sous σ , alors la permutation $\sigma' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ la même décomposition en cycles à supports disjoints que σ (excepté l'id de 1). σ' doit donc avoir $k-1$ cycles dans sa décomposition : il y a donc $s(n-1, k-1)$ choix possibles pour σ' puis pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & \sigma'(2) & \sigma'(3) & \dots & \sigma'(n) \end{pmatrix}$

• Soit $\sigma(1) \neq 1$: commençons par choisir l'image de $\sigma(1)$: il y a $n-1$ possibilités

Considérons alors $\sigma' = (1 \ \sigma(1)) \circ \sigma \in \mathfrak{S}_n$ vérifiant $\sigma'(1) = 1$. Or le cycle contenant 1 dans la décomposition en cycles à supports disjoints de σ est de la forme $(\underbrace{1 \ \sigma(1) \dots \sigma^{k-1}(1)}_{2 \neq 2 \neq})$ avec $\sigma^k(1) = 1$

$$\text{Or } (1 \ \sigma(1)) (1 \ \sigma(1) \dots \sigma^{k-1}(1)) = (\sigma(1) \ \sigma^2(1) \dots \sigma^{k-1}(1))$$

$$\text{Donc } \omega(\sigma') = \omega(\sigma) + 1 \quad (\text{par l'identité du point fixe}) \\ = k + 1$$

D'après le premier point, il y a $s(n-1, k)$ choix pour σ' donc pour σ à $\sigma(1)$ fixé.

Il y a donc $(n-1) s(n-1, k)$ choix pour σ tel que $\sigma(1) \neq 1$.

Les cas étant disjoints, $s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1) s(n-1, k)$.

11. Soit $P_n = \prod_{i=0}^{n-1} (X+i) = X(X+1) \cdots (X+n-1)$

Soit $c(n, k)$ le coefficient de degré k de P_n .
(avec $c(n, 0) = 0$)

Alors $c(n, n) = 1$ car P unitaire

et $c(n, 1) = (n-1)!$ (on prend $1, \dots, n-1$ dans les 2^{es} à n^e termes, nécessairement)

Puis

$$\begin{aligned} P_n &= (X+n-1) P_{n-1} = (X+n-1) \sum_{k=1}^{n-1} c(n-1, k) X^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} c(n-1, k) X^{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) c(n-1, k) X^k \\ &= \sum_{k=2}^n c(n-1, k-1) X^k + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) c(n-1, k) X^k \\ &= (n-1) c(n-1, 1) X + \sum_{k=2}^{n-1} [c(n-1, k-1) + (n-1) c(n-1, k)] X^k \\ &\quad + c(n-1, n-1) X^n \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients de P_n ,

$\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1) c(n-1, k)$,
(et les deux autres coefficients sont cohérents.)

Bref, $c(n, k)$ vérifie les mêmes conditions aux bords et la même relation de récurrence double que les $s(n, k)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, s(n, k) = c(n, k)$.

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, \prod_{i=0}^{n-1} (n+i) = \sum_{k=1}^n s(n, k) x^k.$

12. On a $s(n, k) = | \{X_n = k\} |$ donc

$$P(X_n = k) = \frac{s(n, k)}{n!} \text{ et la fonction génératrice de } X_n \text{ est } G_{X_n} : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{s(n, k)}{n!} x^k \quad (\text{avec } X_n(\mathbb{S}_n) = \mathbb{I}_{1, n} \mathbb{I})$$

$$= \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (x+i) \quad \text{par II.}$$

Comme G_{X_n} dérivable en 1,

$$\begin{aligned} E(X_n) &= G'_{X_n}(1) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} 1 \times 2 \times \dots \times j \times (j+2) \times \dots \times n \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

donc $E(X_n) = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$

13. a.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k-1) s(n, k) &= P_n''(1) \\ &= \left[\sum_{j=0}^{n-1} \prod_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i \neq j}} (x+i) \right]'(1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i \neq j}} \prod_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ k \neq \{i, j\}}} (1+k) \end{aligned}$$

Donc
$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k(k-1) s(n,k) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n-1 \\ i \neq j}} \frac{1}{(i+1)(j+1)}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{1}{ij}$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{ij} - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i=j)}} \frac{1}{i^2}$$

donc
$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k(k-1) s(n,k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$$

13.6 Avec $k(k-1) = k^2 - k$,

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k^2 s(n,k) - \underbrace{\sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_n = k)}_{= \mathbb{E}(X_n)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}.$$

14. a
$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} w(\sigma)^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}(\{\sigma\}) X_n(\sigma)^2$$

$$= \mathbb{E}(X_n^2)$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(X_n = k) \quad (\text{formule de transfert})$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k^2 s(n,k)$$

$$= \mathbb{E}(X_n) + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \quad (\text{qv. 13b})$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_n)^2}_{= \mathbb{E}(X_n)[1 + \mathbb{E}(X_n)]} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} + R_n$$

où $R_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$

$$= \left(\ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(\ln n + 1 + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} + R_n$$

$$= (\ln n)^2 + (1+2\gamma) \ln n + \gamma(1+\gamma) - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) + R_n$$

$$\text{Or } \frac{1}{i^2} \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

Par sommation des relations de comparaison dans le cas de convergence (on aurait pu faire une CSI)

$$R_n \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{i=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\text{Donc } R_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

et

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_n} w(\sigma)^2 = (2\gamma+1) \ln n + \ln(n)^2 + \underbrace{\gamma(1+\gamma)}_{=c} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

14. b. $\boxed{\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\omega(\sigma) - \ln n)^2} = \mathbb{E}((X_n - \ln n)^2)$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)^2 - 2 \underbrace{\frac{\ln n}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)}_{= \ln n \mathbb{E}(X_n)} + (\ln n)^2$$

$$= (2\gamma + 1) \ln n + c + (\ln n)^2 - 2 \left[(\ln n)^2 + \gamma \ln n \right] + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$+ (\ln n)^2$$

$$\boxed{= \ln n + c + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)}$$

15. Soit $\varepsilon > 0$. Erreur d'énoncé: on prend $n \geq 2$.

$$\mathbb{P}(|X_n - \ln n| > \varepsilon \ln n) = \mathbb{P}((X_n - \ln n)^2 > \varepsilon^2 \ln^2 n)$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}((X_n - \ln n)^2)}{\varepsilon^2 \ln^2 n} \quad (\text{inégalité de Markov})$$

$$\stackrel{14.b}{=} \frac{\ln n + c + \ln \frac{\ln n}{n}}{\varepsilon^2 \ln^2 n} \quad \text{avec } (\ln n) \text{ bornée par } M$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2 \ln n} \left[1 + \frac{c}{\ln n} + \frac{\ln n}{n} \right]$$

$$\leq \frac{1 + \frac{c}{2} + \frac{M}{2}}{\varepsilon^2 \ln n} = C \text{ indépendant de } \varepsilon$$

On a donc bien $C > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(|X_n - \ln n| > \varepsilon \ln n) \leq \frac{C}{\varepsilon^2 \ln(n)}.$$

(Encore valable pour $n=1$ avec $\frac{C}{\varepsilon^2 \ln(1)} = +\infty$.)

Deuxième partie :

16. Soit $n \geq 2$.

$$\int_2^n b'(t) A(t) dt = \int_2^n \sum_{k=2}^n b'(t) a_k dt$$

$$\text{Charles} = \sum_{p=2}^{n-1} \int_p^{p+1} \sum_{k=2}^p b'(t) a_k dt$$

quitte à
changer la
borne en $p+1$

$$= \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{k=2}^p a_k [b(t)]_p^{p+1}$$

$2 \leq k \leq p \leq n-1$

$$= \sum_{k=2}^{n-1} a_k \sum_{p=k}^{n-1} (b(p+1) - b(p))$$

$$= \sum_{k=2}^{n-1} a_k (b(n) - b(k))$$

$\underbrace{= 0 \text{ si } k=n}$

$$= \left[\sum_{k=2}^n a_k \right] b(n) - \sum_{k=2}^n a_k b(k)$$

$$\int_2^n b'(t) A(t) dt = A(n) b(n) - \sum_{k=2}^n a_k b(k).$$

17. a) $\prod_{\substack{p \leq 1 \\ p \text{ premier}}} p = 1 \leq 4^1$ (produit vide)

$$\prod_{\substack{p \leq 2 \\ p \text{ premier}}} p = 2 \leq 4^2$$

$$\prod_{\substack{p \leq 3 \\ p \text{ premier}}} p = 6 \leq 4^3$$

17. b) On suppose n pair.

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p = \prod_{\substack{p \leq n-1 \\ p \text{ premier}}} p \quad \text{car } n \text{ n'est pas premier} \\ \text{(pair et } > 2 \text{)}$$

$$\leq 4^{n-1} \quad \text{par HR}$$

$$\text{donc } \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^n$$

17. c Soit p premier dans $\mathbb{I} m+2, 2m+1 \mathbb{I}$.

$$m! \binom{2m+1}{m} = (2m+1)(2m) \dots (m+2) \quad \text{donc } p \mid m! \binom{2m+1}{m}$$

Or $p \nmid m!$ donc $p \nmid m! = 1$ car p premier et par lemme de Gauss, $p \mid \binom{2m+1}{m}$.

Comme ces nombres sont premiers,

$$\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \mid \binom{2m+1}{m}.$$

$$\text{Puis } \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1} = 2 \times 4^m$$

termes positifs dont $\binom{2m+1}{m}$ et $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m}$

$$\text{donc } 2 \times \binom{2m+1}{m} \leq 2 \times 4^m \quad \text{et} \quad \boxed{\binom{2m+1}{m} \leq 4^m}$$

17. d. Avec la question précédente,

$$\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^m$$

$$\text{donc } \prod_{\substack{p \leq n=2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leq \prod_{\substack{p \leq m+1 \\ p \text{ premier}}} p \times 4^m$$

$$\leq 4^{m+1} \times 4^m = 4^{2m+1}$$

HR
 $m+1 < n$

$$\text{donc } \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^n$$

L'initialisation de a) et l'hérédité prouvée avec b) et ce qui précède prouvent par récurrence forte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^n$$

(Inégalité de Tchebychev utile pour prouver le postulat de Bertrand)

18 - Formule de Legendre

$$v_p(n!) = \sum_{j=1}^{\infty} v_p(j)$$

Or le nombre de multiples de p^k dans $\mathbb{I}1, n\mathbb{I}$ est $E(\frac{n}{p^k})$.

Donc le nombre d'entier $j \in \mathbb{I}1, n\mathbb{I}$ tel que $v_p(j) = k$ vaut $E(\frac{n}{p^k}) - E(\frac{n}{p^{k+1}})$ (multiple de p^k mais pas p^{k+1})

donc, en regroupant dans la somme par valeurs de $v_p(j)$,

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times [E(\frac{n}{p^k}) - E(\frac{n}{p^{k+1}})] \quad (\text{Somme finie})$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k E(\frac{n}{p^k}) - \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) E(\frac{n}{p^k})$$

~~k=1~~
1

$$\text{donc } v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} E(\frac{n}{p^k})$$

Alors

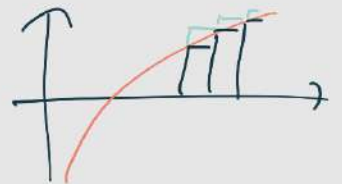
$$v_p(n!) \geq E\left(\frac{n}{p}\right) > \frac{n}{p} - 1$$

$$\text{et } v_p(n!) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = n \times \frac{\frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1} = \frac{n}{p} + n \left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right]$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}}$$

19.a $\ln$ est continue et croissante sur $[1, +\infty[$

$$\int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt$$



$$\text{donc } \int_1^n \ln t \, dt \leq \sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_1^n \ln t \, dt + \ln n$$

$$\text{avec } \int_1^n \ln t \, dt = \left[t \ln t - t \right]_1^n = n \ln n - n + 1$$

$$\text{donc } 0 \leq \sum_{k=1}^n \ln k - n \ln n + n \leq \ln n$$

$$\text{et, par encadrement } \boxed{\sum_{k=1}^n \ln k - n \ln n + n = O(\ln n)}$$

19.b Les diviseurs premiers de $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ divisent l'un des termes donc $\leq n$.

Ainsi, par décomposition primaire,

$$\boxed{n! = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{v_p(n!)}}$$

$$\text{donc } \ln(n!) = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} v_p(n!) \ln p$$

Par 18,

$$n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} - \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \ln p < \ln n! \leq n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

$$= \ln \left(\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \right)$$

$$\stackrel{17}{\leq} \ln(4^n) = n \ln 4$$

Donc

$$n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} - n \ln 4 < \ln n! \leq n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

19. c $\frac{\ln k}{k(k-1)} = o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$ par croissances comparées et $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ converge (Riemann, $3/2 > 1$)

Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{k \geq 2} \frac{\ln k}{k(k-1)} \text{ converge}$$

19. d Par b),

$$\frac{\ln(n!)}{n} - \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p(p-1)} \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} < \underbrace{\ln 4}_{=O(1)} + \frac{\ln(n!)}{n} \quad (*)$$

$$\text{avec } 0 \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p(p-1)} \leq \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k(k-1)} = O(1)$$

$= O(1)$ par encadrement

Et par la formule de Stirling,

$$\ln\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}\right) = \ln(n!) - \ln \sqrt{2\pi n} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n = o(1)$$

donc $\ln(n!) = \ln \sqrt{2\pi} + (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + o(1)$

et $\frac{\ln(n!)}{n} = \ln n + \underbrace{\frac{\ln(\sqrt{2\pi})}{n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\ln n}{2n}}_{\rightarrow 0} - 1 + \underbrace{o(\frac{1}{n})}_{\rightarrow 0}$

(On avait aussi pu utiliser 10.a) $= O(1)$

Finalement, les deux membres de l'encadrement (*)

s'écrivent $\ln n + O(1)$ donc

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1)$$

20a. Soit $(a_n)_{n \geq 2}$ telle que

$$\forall n \geq 2, \quad a_n = \begin{cases} \frac{\ln n}{n} & \text{si } n \text{ premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $f = \frac{1}{\ln} : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A(t) = \sum_{2 \leq k \leq t} a_k = \sum_{\substack{p \leq t \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} = R(t) + \ln t$$

D'après 16, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} \times \frac{1}{\ln p} = \sum_{k=2}^n a_k b(k) = A(n) f(n) - \int_2^n f'(t) A(t) dt$$

donc $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = 1 + \ln_2(n) - \ln_2(2) + \frac{R(n)}{\ln n} + \int_2^n \frac{R(t)dt}{t \ln^2 t}$

donc $\left| \frac{R(t)}{t \ln^2 t} \right| \leq \frac{f(t) + \ln 2}{t \ln^2 t} \leq \frac{M + \ln 2}{t \ln^2 t}$
avec $M \in \mathbb{R}^+$ car $f = O(1)$ (19.d) et $\int_2^x \frac{dt}{|t \ln^2 t|} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln 2}$

$$\text{et } \frac{\ln(1 - \frac{1}{t})}{t \ln^2 t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} - \frac{1}{t^2 \ln^2 t} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

avec $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ intégrable sur $[2, +\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$)

donc la f^{-2} continue $t \mapsto \frac{\ln(1 - \frac{1}{t})}{t \ln^2 t}$ l'est.

Reste à voir que $t \mapsto \frac{R(t)}{t \ln^2 t}$ est continue par morceaux sur $[2, +\infty[$.

Or sur tout intervalle de la forme $[n, n+1[$,

$$R(t) = \underbrace{\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p}}_{\text{constant}} - \ln t \quad \text{donc } R \text{ est}$$

bien continu sur tout $[n, n+1[$ avec des limites finies aux deux bornes.

On a donc bien, finalement,

$$t \mapsto \frac{R(t)}{t \ln^2 t} \text{ intégrable sur } [2, +\infty[.$$

20c - On a vu dans la question précédente que

$$|R(t)| \leq f(t) + \ln 2 \leq M + \ln 2 \quad \text{donc}$$

$$R(t) = O(1)_{t \rightarrow +\infty}$$

Puis
$$\int_2^n \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt = \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt + \int_n^{+\infty} \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt$$

avec
$$\frac{R(t)}{t \ln^2 t} = O\left(\frac{1}{t \ln^2 t}\right) \text{ donc par}$$

Sommation des relations de comparaison dans le cas de convergence,

$$\int_n^{+\infty} \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2 t}}_{= \frac{1}{\ln n}} \right)$$

Ainsi, avec 20.a,

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premie}}} \frac{1}{p} = \ln_2(n) + \underbrace{\left[1 - \ln_2(2) + \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt \right]}_{= c_1} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

21. a Soit $x \geq 1$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N} \cap [1, x] \\ n \equiv 0 [q] \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} n = q \times k \\ 1 \leq q \times k \leq x \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} n = qk \\ \frac{1}{q} \leq k \leq \frac{x}{q} \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \exists k \in \llbracket 1, \lfloor \frac{x}{q} \rfloor \rrbracket, n = qk$$

Comme ces multiples de q sont distincts,

$$|\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x], n \equiv 0 (q)\}| = \lfloor \frac{x}{q} \rfloor$$

Or $0 \leq \frac{x}{q} - \lfloor \frac{x}{q} \rfloor < 1$ (partie fractionnaire)

donc $\left| |\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x], n \equiv 0 (q)\}| - \lfloor \frac{x}{q} \rfloor \right| \leq 1$ qui ne dépend ni de x , ni de q .

21. b

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) = \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{p|n \\ p \text{ premier}}} 1$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ p|n \\ p \text{ premier}}} 1$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \sum_{\substack{n \leq x \\ p|n}} 1$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} |\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x], n \equiv 0 (p)\}|$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \left[\frac{x}{p} + \alpha_{x,p} \right] \quad \text{avec } |\alpha_{x,p}| \leq 1 \text{ par 21.a}$$

$$= \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \alpha_{x,p}$$

$$O\bar{u} \quad \left| \frac{1}{x} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \alpha_{x,p} \right| \leq \frac{1}{x} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \underbrace{|\alpha_{x,p}|}_{\leq 1} \\ \leq \frac{1}{x} \times \lfloor x \rfloor \leq 1$$

Ainsi, avec 20.c,

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) = \left(\ln_2(n) + \underbrace{C_1}_{\substack{\text{constat} \\ \text{donc} \\ \text{borné}}} + \underbrace{\frac{\ln n}{\ln n}}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ donc} \\ \text{borné}}} \right) + O(1) \quad \text{avec } (\ln n) \text{ borné}$$

donc $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) = \ln_2(n) + O(1).$

22 a

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 = \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\omega(n))^2 - 2 \frac{\ln_2 x}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) \\ + \frac{\ln_2^2 x}{x} \times \lfloor x \rfloor$$

$$\stackrel{21.b}{=} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\omega(n))^2 - 2 \ln_2 x (\ln_2 x + O(1)) \\ + \frac{\ln_2^2 x}{x} (x + O(1))$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\omega(n))^2 - \ln_2^2 x + O(\ln_2 x) \\ + \ln_2 x \times \underbrace{\frac{\ln_2 x}{x}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty} \text{ donc } O(1)} \times O(1)$$

donc
$$\frac{1}{n} \sum_{n \leq x} (\omega(n) - \ln_2 x)^2 = \frac{1}{n} \sum_{n \leq x} (\omega(n))^2 - \ln_2^2 x + O(\ln_2 x)$$

22. b

$$\sum_{n \leq x} (\omega(n))^2 = \sum_{n \leq x} \left(\sum_{\substack{p_1 | n \\ p_1 \text{ premier}}} 1 \times \sum_{\substack{p_2 | n \\ p_2 \text{ premier}}} 1 \right)$$

$$= \sum_{\substack{p_1, p_2 \text{ premiers} \\ p_1 | n \\ p_2 | n \\ n \leq x}} 1$$

$$= \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premier}}} \sum_{\substack{p_2 \leq x \\ p_2 \text{ premier}}} \sum_{\substack{n \leq x \\ p_1 | n \\ p_2 | n}} 1$$

donc

$$\sum_{n \leq x} (\omega(n))^2 = \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premier}}} \sum_{\substack{p_2 \leq x \\ p_2 \text{ premier}}} |\{n \in \mathbb{N}^* \cap [1, x], p_1 | n, p_2 | n\}|$$

22 c. Notons $E_x(p_1, p_2) = \{n \in \mathbb{N}^* \cap [1, x], p_1 | n \text{ et } p_2 | n\}$
 $= \{n \in \mathbb{N}^* \cap [1, x], p_1 p_2 | n\}$ si $p_1 \neq p_2$

$$0 \leq \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \\ \text{premiers}}} |E_x(p_1, p_2)| \leq \sum_{\substack{p_1 \times p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \\ \text{premiers}}} \left(\frac{x}{p_1 p_2} + 1 \right) \text{ par 21 a.}$$

(Note: A red bracket under the sum on the left is labeled "= 0 si $p_1 p_2 > x$ ")

$\leq x \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premier}}} \frac{1}{p_1} \sum_{\substack{p_2 \leq x \\ p_2 \text{ premier}}} \frac{1}{p_2} + \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premier}}} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{x}{p_1} \\ p_2 \text{ premier}}} 1$

Il s'agit du cas linéaire proposé en indication.

donc la 1^{re} somme, on revient à $p_1 \leq x$ et $p_2 \leq x$ la majorant

$\leq x \left(\ln_2(\lfloor x \rfloor) + C_1 + \underbrace{O\left(\frac{1}{\ln \lfloor x \rfloor}\right)}_{\text{borné}} \right)^2 + \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premier}}} \frac{x}{p_1}$

20.c

$$\leq x (\ln_2 x + O(1))^2 + x (\ln_2 x + O(1))$$

$$\leq x \ln_2^2 x + \underbrace{O(x \ln_2 x) + x \ln_2 x + O(1)}_{= O(x \ln_2 x)}$$

Donc

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \\ \text{premiers}}} |E_x(p_1, p_2)| - x \ln_2^2 x = O(x \ln_2 x) \quad x \rightarrow +\infty$$

22.d Ainsi, avec 22.a,

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 \stackrel{22.b.}{=} \frac{1}{x} \left[\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \\ \text{premiers}}} |E_x(p_1, p_2)| + \sum_{\substack{p \leq x \\ \text{premier}}} |E_x(p, p)| \right] - \ln_2^2 x + O(\ln_2 x)$$

$$\stackrel{22.c}{=} \frac{1}{x} \left[\cancel{x \ln_2^2 x} + O(x \ln_2 x) + \sum_{\substack{p \leq x \\ \text{premier}}} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \right] - \cancel{\ln_2^2 x} + O(\ln_2(x))$$

$$\text{avec } \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \stackrel{\text{20c}}{\leq} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = \ln_2 \lfloor x \rfloor + O(1) \\ \leq \ln_2(x) + O(1)$$

$$\text{où } \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{x} \right] \stackrel{\text{20c}}{\geq} \ln_2(\lfloor x \rfloor) + O(1) - 1$$

$$\stackrel{\ln_2 \uparrow}{\geq} \ln_2(x-1) + O(1)$$

$$= \ln(\ln x + \ln(1 - \frac{1}{x})) + O(1)$$

$$= \ln_2(x) + \underbrace{\ln \left(1 + \frac{\ln(1 - \frac{1}{x})}{\ln x} \right)}_{\xrightarrow[\text{car}]{\text{donc borne}} 0} + O(1)$$

$$= \ln_2(x) + O(1)$$

$$\text{Par encadrement, } \frac{1}{x} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = \ln_2(x) + O(1) \\ = O(\ln_2(x))$$

$$\text{Donc } \boxed{\frac{1}{x} \left(\sum_{n \leq x} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 \right) = O(\ln_2(x))_{+ \infty}}$$

23 - Suivons l'indication :

$$|\mathcal{Y}_n[1, x]| = |\mathcal{Y}_n[\sqrt{x}, x]| + |\mathcal{Y}_n[1, \sqrt{x}]| \text{ et vérifions que}$$

$$|\mathcal{Y}_n[1, \sqrt{x}]| = O(\sqrt{x}).$$

$$\text{Or } 0 \leq \frac{|Y_n[1, \sqrt{n}]|}{\sqrt{n}} \leq \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}} \leq 1 \quad \text{donc on a bien}$$

$$|Y_n[1, \sqrt{n}]| = O(\sqrt{n}).$$

$$\text{Reste à voir que } \frac{1}{n} |Y_n[\sqrt{n}, n]| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Or } n \in Y_n[\sqrt{n}, n] \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{n} \leq n \leq n \\ |\omega(n) - \ln_2(n)| \geq (\ln_2 n)^{3/4} \end{cases}$$

$$\text{et si } \sqrt{n} \leq n \leq n, \quad \frac{\ln n}{2} \leq \ln n \leq \ln n \quad \text{puis}$$

$$\ln_2 n - \ln 2 \leq \ln_2 n \leq \ln_2 n$$

$$\text{donc } -\ln 2 \leq \ln_2 n - \ln_2 n \leq 0$$

$$\text{donc } |\ln_2 n - \ln_2 n| \leq \ln 2$$

$$\text{alors, pour tout } n \in Y_n[\sqrt{n}, n],$$

$$(\ln_2(n))^{3/4} \leq |\omega(n) - \ln_2(n)| \leq |\omega(n) - \ln_2(n)| + \underbrace{|\ln_2(n) - \ln_2(n)|}_{\leq \ln 2}$$

$$\text{donc } |\omega(n) - \ln_2(n)| \geq (\ln_2(n))^{3/4} - \ln 2$$

puis