

Problème

Le but de ce problème est de construire la fonction logarithme népérien

Partie I : Caractérisation des fonctions logarithmes par une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue non identiquement nulle, telle que :

$$[**] : \forall (x, y) \in]0, +\infty[^2 : f(xy) = f(x) + f(y)$$

On considère la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel t par $h(t) = f(e^t)$.

1. $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 0$.

2. $\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2 : e^t > 0$ et $e^u > 0$. Avec $[**]$:

$$h(t+u) = f(e^{t+u}) = f(e^t \cdot e^u) = f(e^t) + f(e^u) = h(t) + h(u).$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$.

- $h(0) = f(e^0) = f(1) = 0$

- Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ fixé que : $h(nt) = nh(t)$.

- $h((n+1)t) = h(nt+t) = h(nt) + h(t) = nh(t) + h(t) = (n+1)h(t)$

Par récurrence, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, : $h(nt) = nh(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, :

$$0 = f(1) = h(0) = h(nt - nt) = h(nt) + h(-nt) \text{ donc } h(-nt) = -h(nt) = (-n)h(t).$$

Ainsi : Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, : $h(nt) = nh(t)$.

4. On pose désormais $a = h(1)$. Soit $r \in \mathbb{Q}$, $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : r = \frac{p}{q}$:

$$h(p) = ap \text{ et } h(p) = h(q \cdot r) = qh(r) \text{ ainsi } h(r) = a\frac{p}{q} = ar.$$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe (r_n) une suite de rationnels convergeant vers t .

$$f \text{ est continue donc } h \text{ est continue par composée. D'où : } h(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ar_n = at$$

On en déduit que : $\forall t \in \mathbb{R} : h(t) = at$.

6. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = h(\ln(x)) = a \cdot \ln(x)$.

Partie II : Construction de ℓ sur $\mathbb{N}^*$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. On considère les suites $(u_n^{(p)})_{n \geq 1}$ et $(v_n^{(p)})_{n \geq 1}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^* :$

$$u_n^{(p)} = \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{pn} \quad \text{et} \quad v_n^{(p)} = \sum_{k=n}^{pn-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn-1}$$

1. • $u_{n+1}^{(p)} - u_n^{(p)} = \sum_{k=n+2}^{pn+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{pn+1} + \cdots + \frac{1}{pn+p}$

Or : $\forall k \in [1, p] : \frac{1}{pn+k} \geq \frac{1}{pn+p}$

Donc $u_{n+1}^{(p)} - u_n^{(p)} \geq -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{pn+p} + \cdots + \frac{1}{pn+p} \geq -\frac{1}{n+1} + \frac{p}{pn+p} \geq 0$. Donc $(u_n^{(p)})_{n \geq 1}$ est croissante.

- $v_{n+1}^{(p)} - v_n^{(p)} = \sum_{k=n+1}^{pn+p-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{pn-1} \frac{1}{k} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{pn} + \cdots + \frac{1}{pn+p-1}$

Or : $\forall k \in [0, p-1] : \frac{1}{pn+k} \leq \frac{1}{pn}$

Donc $v_{n+1}^{(p)} - v_n^{(p)} \leq -\frac{1}{n} + \frac{1}{pn} + \cdots + \frac{1}{pn} \leq -\frac{1}{n} + \frac{p}{pn} \leq 0$. Donc $(v_n^{(p)})_{n \geq 1}$ est décroissante.

- $v_n^{(p)} - u_n^{(p)} = \sum_{k=n}^{pn-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{pn} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Ainsi les suites $(u_n^{(p)})_{n \geq 1}$ et $(v_n^{(p)})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

On note désormais $\ell(p)$ leur limite commune. Par convention, on pose $\ell(1) = 0$

2. Soit p et p' deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^* : u_n^{(pp')} = \sum_{k=n+1}^{pp'n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} + \sum_{k=(pn)+1}^{p'(pn)} \frac{1}{k}$

Donc $u_n^{(pp')} = u_n^{(p)} + u_{pn}^{(p')}$.

(b) $n \mapsto pn$ est strictement croissante. Donc $u_{pn}^{(p')} \rightarrow \ell(p')$ comme sous suite de $(u_n^{(p')})_{n \geq 1}$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité de la question précédente, il vient que : $\ell(pp') = \ell(p) + \ell(p')$.

- (c) • $\ell(p^1) = \ell(p) = 1\ell(p) =$
 • Supposons pour n fixé que $\ell(p^m) = m\ell(p)$.
 • $\ell(p^{m+1}) = \ell(p^m \cdot p) = \ell(p^m) + \ell(p) = m\ell(p) + \ell(p) = (m+1)\ell(p)$.

Par récurrence sur m , avec la question précédente, on montre que :

Pour tous entiers $p \geq 2$ et $m \geq 0$: $\ell(p^m) = m\ell(p)$.

- (d) Avec la convention, $\ell(1) = 0$, les deux relations précédentes restent vraies dans le cas où p ou p' vaut 1.

$$\ell(1^m) = 0 = m\ell(1).$$

$$\ell(1 \cdot p') = \ell(p') = \ell(1) + \ell(p').$$

$$\ell(p \cdot 1) = \ell(p) = \ell(p) + \ell(1).$$

3. Soit p et p' deux entiers tels que $1 \leq p < p'$.

(a) • $u_n^{(p+1)} - u_n^{(p)} = \sum_{k=n+1}^{pn+n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \frac{1}{pn+1} + \dots + \frac{1}{pn+n}$

Or $\forall k \in [1, n] : \frac{1}{pn+k} \leq \frac{1}{pn}$

Donc $u_n^{(p+1)} - u_n^{(p)} \leq \frac{1}{pn} + \dots + \frac{1}{pn} \leq \frac{n}{pn} \leq \frac{1}{p}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient : $\ell(p+1) - \ell(p) \leq \frac{1}{p}$

• $u_n^{(p+1)} - u_n^{(p)} = \sum_{k=n+1}^{pn+n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \frac{1}{pn+1} + \dots + \frac{1}{pn+n}$

Or : $\forall k \in [1, n] : \frac{1}{pn+k} \geq \frac{1}{pn+n}$

Donc $u_n^{(p+1)} - u_n^{(p)} \geq \frac{1}{pn+n} + \dots + \frac{1}{pn+n} \geq \frac{n}{pn+n} \geq \frac{1}{p+1}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient : $\ell(p+1) - \ell(p) \geq \frac{1}{p+1}$

donc : $\frac{1}{p+1} \leq \ell(p+1) - \ell(p) \leq \frac{1}{p}$.

(b) Par télescopage : $\ell(p') - \ell(p) = \sum_{i=p}^{p'-1} \ell(i+1) - \ell(i)$

Avec la question précédente : $\sum_{i=p}^{p'-1} \frac{1}{i+1} \leq \ell(p') - \ell(p) \leq \sum_{i=p}^{p'-1} \frac{1}{i}$

Or : $\forall i \in [p, p'-1] : \frac{1}{i+1} \geq \frac{1}{p'}$ et $\forall i \in [p, p'-1] : \frac{1}{i} \leq \frac{1}{p}$

En sommant, il vient : $\frac{p'-p}{p'} \leq \ell(p') - \ell(p) \leq \frac{p'-p}{p}$

Partie III : Prolongement de ℓ aux nombres rationnels ...

Pour tout nombre rationnel $r > 0$, égal à une fraction $\frac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $\ell(r) = \ell(p) - \ell(q)$.

1. Soit $r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$. On a donc : $pq' = p'q$.

Avec II 2.(b) : $\ell(p) + \ell(q') = \ell(p') + \ell(q)$ d'où $\ell(p) - \ell(q) = \ell(p') - \ell(q')$

Ainsi $\ell(r)$ est bien défini, c'est-à-dire que le résultat ne dépend pas de la fraction choisie pour représenter r .

2. $r = \frac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbb{N}^*$ et $r = \frac{p'}{q'}$ avec p' et q' dans $\mathbb{N}^*$.

$rr' = \frac{pp'}{qq'}$. Comme on a bien pp' et qq' dans $\mathbb{N}^*$:

$$\ell(rr') = \ell(pp') - \ell(qq').$$

Toujours avec II 2.(b) : $\ell(rr') = \ell(p) + \ell(p') - \ell(q) - \ell(q') = (\ell(p) - \ell(q)) + (\ell(p') - \ell(q'))$.

Ainsi : $\ell(rr') = \ell(r) + \ell(r')$.

$\frac{r}{r'} = \frac{pq'}{qp'}$. Comme on a bien pq' et qp' dans $\mathbb{N}^*$:

$$\ell\left(\frac{r}{r'}\right) = \ell(pq') - \ell(qp').$$

Toujours avec II 2.(b) :

$$\ell\left(\frac{r}{r'}\right) = \ell(p) + \ell(q') - \ell(q) - \ell(p') = (\ell(p) - \ell(q)) - (\ell(p') - \ell(q')).$$

Ainsi : $\ell\left(\frac{r}{r'}\right) = \ell(r) - \ell(r')$.

3. Soit r, r' deux rationnels tels que : $0 < r < r'$:

$r = \frac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbb{N}^*$ et $r = \frac{p'}{q'}$ avec p' et q' dans $\mathbb{N}^*$.

Comme $0 < r < r'$, on obtient : $0 < pq' < p'q$

$$\ell(r') - \ell(r) = (\ell(p') - \ell(q')) - (\ell(p) - \ell(q)) = (\ell(p') + \ell(q)) - (\ell(p) + \ell(q')) = \ell(p'q) - \ell(pq')$$

Avec II 3.(b) : $\frac{p'q - pq'}{p'q} \leq \ell(p'q) - \ell(pq') \leq \frac{p'q - pq'}{pq'}$

$$\text{Or : } \frac{p'q-pq'}{p'q} = \left(\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} \right) \frac{q'}{p'} = \frac{r'-r}{r'} \text{ et } \frac{p'q-pq'}{pq'} = \frac{r'-r}{r}.$$

$$\text{Ainsi : } 0 < \frac{r'-r}{r'} \leq \ell(r') - \ell(r) \leq \frac{r'-r}{r}.$$

Partie IV : Prolongement de ℓ aux nombres réels...

On considère x et x' deux réels strictement positifs.

1. $X = \{\ell(r) ; r \in \mathbb{Q} \cap]0, x]\}$.

- Toute limite de rationnels étant un réel et toute limite de réels étant un réel, on en déduit : $\forall r \in \mathbb{Q} \cap]0, x], \ell(r) \in \mathbb{R}$ donc $X \subset \mathbb{R}$
- Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < r < x$. Puis $\ell(r) \in X$ donc X est non vide.
- Il existe $s \in \mathbb{Q}$ tel que $s > x$.

Or ℓ est strictement croissante sur $\mathbb{Q}_+$ donc :

$$\forall r \in \mathbb{Q} \cap]0, x], \ell(r) \leq \ell(s)$$

X est majoré par $\ell(s)$.

Avec l'axiome de la borne supérieure :

X admet une borne supérieure. On note $\ell(x) = \sup X$.

2. Soit x est rationnel. Avec III 3. : ℓ est croissante sur $\mathbb{Q}$.

D'où $\forall r \in \mathbb{Q} \cap]0, x], \ell(r) \leq \ell(x)$

Donc $\ell(x)$ est le plus grand élément de X . D'où $\ell(x)$ est la borne supérieure de X . Ainsi, dans le cas où x est rationnel, cette définition de ℓ coïncide bien avec la précédente.

3. Soit (r_n) est une suite croissante de rationnels strictement positifs qui converge vers x .

- Cas1 : $x \in \mathbb{Q}$. Avec III 3. :

$$0 \leq \ell(x) - \ell(r_n) \leq \frac{x-r_n}{r_n}.$$

Avec le théorème des gendarmes : $\ell(r_n) \longrightarrow \ell(x)$.

- Cas2 : $x \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\ell(x)$ est la borne supérieure de X .

Il existe $q \in \mathbb{Q} \cap]0, x[$ tel que : $\ell(x) - \varepsilon < \ell(q) \leq \ell(x)$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0 : 0 < q \leq r_n \leq x$

ℓ est strictement croissante sur $\mathbb{Q}_+$ et $\ell(r_n) \in X$ donc :

$$\ell(x) - \varepsilon < \ell(q) \leq \ell(r_n) \leq \ell(x).$$

Donc $|\ell(r_n) - \ell(x)| \leq \varepsilon$.

Dans ce cas aussi : $\ell(r_n) \longrightarrow \ell(x)$.

Ainsi la suite $(\ell(r_n))$ converge vers $\ell(x)$.

4. • Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r_1 \in \mathbb{Q}$ tel que : $\max(x-1; 0) < r_1 < x$.

- Supposons pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé avoir construit : $r_1, r_2, \dots, r_n$ tels que :

$$r_1 < r_2 < \dots < r_n < x \text{ et } \forall k \in [1, n] \quad x - \frac{1}{k} < r_k < x.$$

- Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r_{n+1} \in \mathbb{Q}$ tel que : $\max(x - \frac{1}{n+1}; r_n) < r_{n+1} < x$.

D'où par récurrence, la construction d'une suite strictement croissante (r_n) de rationnels strictement positifs telle que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < r_n < x - \frac{1}{n}$

Avec le théorème des gendarmes : $r_n \longrightarrow x$.

5. Avec IV 4. , il existe :

(r_n) une suite croissante de rationnels strictement positifs qui converge vers x .

et (r'_n) une suite croissante de rationnels strictement positifs qui converge vers x' .

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < r_n < r_{n+1} \text{ et } 0 < r'_n < r'_{n+1}$$

$$\text{Par produit : } 0 < r_n \cdot r'_n < r_{n+1} \cdot r'_{n+1}$$

donc $(r_n \cdot r'_n)$ est une suite croissante de rationnels strictement positifs qui converge vers $x \cdot x'$.

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ell(r_n \cdot r'_n) = \ell(r_n) + \ell(r'_n)$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient, avec IV 3. : $\ell(xx') = \ell(x) + \ell(x')$

6. On a $0 < x < x'$. Avec IV 4. , il existe :

(r_n) une suite croissante de rationnels strictement positifs qui converge vers x .

et (r'_n) une suite croissante de rationnels strictement positifs qui converge vers x' .

Comme $0 < x < x'$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0$ tel que $0 < r_n \leq x < r'_n \leq x'$.

$$\text{Avec III 3 : } \forall n > n_0 : \frac{r'_n - r_n}{r'_n} \leq \ell(r'_n) - \ell(r_n) \leq \frac{r'_n - r_n}{r_n}$$

$$\text{En faisant tendre } n \text{ vers } +\infty : \frac{x' - x}{x'} \leq \ell(x') - \ell(x) \leq \frac{x' - x}{x}.$$

7. Soit x, x' deux réels tels que : $0 < x < x'$. Avec la question précédente :

$$\frac{x' - x}{x'} \leq \ell(x') - \ell(x) \leq \frac{x' - x}{x}.$$

En faisant tendre x' vers x^+ , $\ell(x') - \ell(x) \rightarrow 0$ et on prouve que ℓ est continue à droite en x .
 En faisant tendre x vers x'^- , $\ell(x) - \ell(x') \rightarrow 0$ et on prouve que ℓ est continue à gauche en x' .
 Ainsi la fonction $\ell : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

8. Soit x, x' deux réels tels que : $0 < x < x'$. Avec la question IV 6. : $\frac{1}{x'} \leq \frac{\ell(x') - \ell(x)}{x' - x} \leq \frac{1}{x}$.
 En faisant tendre x' vers x^+ , on prouve que ℓ est dérivable à droite en x et que $\ell'(x) = \frac{1}{x}$.
 En faisant tendre x vers x'^- , on prouve que ℓ est dérivable à gauche en x' et que $\ell'(x') = \frac{1}{x'}$.
 Ainsi la fonction $\ell : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$: $\ell'(x) = \frac{1}{x}$.
9. Avec la question précédente et $\ell(1) = 0$, on en déduit que $\ell = \ln$.

FIN DU SUJET.