

SUJET

MPI*

À LIRE ATTENTIVEMENT

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des questions (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est conseillé d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Aucun départ avant la fin des 4 heures n'est autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE CONCOURS D'ADMISSION 1999 FILIÈRE **MP**

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

On se propose de démontrer quelques propriétés des nombres irrationnels et de leurs approximations par des rationnels.

On désigne par

- $\mathcal{E}$ l'ensemble des nombres réels irrationnels,
- $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x ,
- G le groupe des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des entiers relatifs et $ad - bc = \pm 1$.

La première partie est indépendante des suivantes.

Indications

- 4.** Pour les 3/2 : admettre qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que l'ensemble des polynômes admettant x comme racine vérifie

$$I_x = \{Q \in \mathbf{Q}[X], Q(x) = 0\} = P\mathbf{Q}[X] = \{PA, A \in \mathbf{Q}[X]\}$$

et vérifier qu'il s'agit du seul qui réponde à la question.

Pour les 5/2 : le justifier !

- 5.b** Un homomorphisme de groupes, c'est tout simplement un morphisme de groupes.

- 10.b** On rappelle qu'une conclusion du théorème spécial sur les séries alternées est que la valeur absolue du reste à tout ordre est majorée par la valeur absolue de son premier terme.

NE PAS TRAITER LES DEUX DERNIÈRES PARTIES.

Première partie

Dans cette partie, on fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on définit deux suites de réels > 0 : $(p_n), (q_n)$, $n \geq 0$, par les conditions

$$\begin{aligned} p_0 &= \alpha & , & & p_1 &= \alpha^2 + 1 & , & & p_n &= \alpha p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_0 &= 1 & , & & q_1 &= \alpha & , & & q_n &= \alpha q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

pour $n \geq 2$.

- 1.** Expliciter p_n et q_n en fonction de α .

2. Déterminer la limite λ de $r_n = p_n/q_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Supposant α entier, λ peut-il être rationnel ?

Deuxième partie

On dit qu'un nombre réel irrationnel x est *algébrique* s'il annule un polynôme P de $\mathbf{Q}[X]$ de degré ≥ 2 .

4. Montrer que, si x est irrationnel et algébrique, il existe un unique polynôme P de $\mathbf{Q}[X]$ irréductible, de degré ≥ 2 , annulé par x et dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

On notera P_x ce polynôme et d_x son degré.

5.a) Vérifier que, pour tout $g \in G$ et tout $x \in \mathcal{E}$, le nombre $T_g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ existe et appartient à $\mathcal{E}$.

b) Vérifier que l'application $g \mapsto T_g$ est un homomorphisme de G dans le groupe des permutations de $\mathcal{E}$, et déterminer son noyau.

6. Montrer que, si x est irrationnel et algébrique, $T_g(x)$ l'est aussi, et comparer d_x et $d_{T_g(x)}$.

7. On pose $x = \sqrt{m}$ où m est un entier > 0 , mais n'est pas le carré d'un entier. Déterminer les nombres y de la forme $T_g(x)$, $g \in G$, dont le carré est un entier.

Troisième partie

Dans cette partie, pour tout nombre réel x , on note $A(x)$ la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On fixe une suite $u = (u_n)$, $n \in \mathbf{N}$, avec $u_0 \in \mathbf{N}$ et $u_n \in \mathbf{N}^*$ pour $n > 0$. Enfin, on définit p_n et q_n par

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A(u_0)A(u_1) \dots A(u_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8. Vérifier que l'on a

$$p_n = u_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad , \quad q_n = u_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

pour $n \geq 2$.

On pose $r_n = p_n/q_n$.

9. Exprimer $r_n - r_{n-1}$ en fonction de q_n et q_{n-1} .

10.a) Montrer que la suite (r_n) admet une limite qu'on notera $\lambda(u)$.

b) Montrer que $\lambda(u)$ est irrationnel.

[On pourra comparer $|\lambda(u) - r_n|$ et $1/q_n q_{n-1}$.]

c) Déterminer $E(\lambda(u))$.

******* FIN DE LA PARTIE DU SUJET À TRAITER *******

Quatrième partie

Pour tout réel non entier x on pose $F(x) = 1/(x - E(x))$.

11. Montrer que l'itérée F^n est définie en x pour tout entier $n > 0$ si et seulement si $x \in \mathcal{E}$.

12. On considère une suite u ayant les propriétés indiquées à la troisième partie ; on définit une suite u' par $u'_n = u_{n+1}$, laquelle définit à son tour des nombres p'_n, q'_n, r'_n et $\lambda(u')$.

a) Exprimer p_n et q_n en fonction de u_0, p'_{n-1}, q'_{n-1} .

b) Comparer $\lambda(u')$ et $F(\lambda(u))$.

c) On suppose la suite u périodique. Montrer que $\lambda(u)$ est algébrique et déterminer $d_{\lambda(u)}$.

d) Même question en supposant seulement la suite u périodique à partir d'un certain rang.

Cinquième partie

13. Dans cette question, on fixe deux nombres irrationnels x et y vérifiant

$$E(F^k(x)) = E(F^k(y))$$

pour tout $k \geq 0$.

a) Établir l'égalité, pour $n \geq 1$

$$y - x = (-1)^n \left(F^n(y) - F^n(x) \right) \prod_{k=0}^{n-1} \left[\left(F^k(x) - E(F^k(x)) \right) \left(F^k(y) - E(F^k(y)) \right) \right].$$

b) Montrer que $x = y$.

14. Étant donné un nombre réel irrationnel x , construire une suite u vérifiant $\lambda(u) = x$, et démontrer son unicité.