

DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 1

À LIRE ATTENTIVEMENT

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des questions (quitte à laisser des blancs pour « plus tard »).
- Il est conseillé d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Aucun départ avant la fin des 4 heures n'est autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.

Exercice

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que

$$E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2.$$

2. (a) Démontrer que :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2.$$

- (b) Démontrer que :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f.$$

Problème

Le but de ce problème est de construire la fonction logarithme népérien

Partie I : Caractérisation des fonctions logarithmes par une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue non identiquement nulle, telle que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$

On considère la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel t par $h(t) = f(e^t)$.

- Déterminer $f(1)$.
- Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $h(nt) = nh(t)$.
- On pose désormais $a = h(1)$. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $h(r) = ar$.
- En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = at$.
- En déduire, pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'expression de $f(x)$.

Partie II : Construction de ℓ sur $\mathbb{N}^*$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. On considère les suites $(u_n^{(p)})_{n \geq 1}$ et $(v_n^{(p)})_{n \geq 1}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^{(p)} = \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n^{(p)} = \sum_{k=n}^{pn-1} \frac{1}{k}.$$

8. Démontrer que les suites $(u_n^{(p)})_{n \geq 1}$ et $(v_n^{(p)})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

On note désormais $\ell(p)$ leur limite commune.

Par convention, on pose $\ell(1) = 0$.

9. Soit p et p' deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^{(pp')} = u_n^{(p)} + u_{pn}^{(p')}$.

(b) En déduire que $\ell(pp') = \ell(p) + \ell(p')$.

(c) En déduire que, pour tous entiers $p \geq 2$ et $m \geq 0$, $\ell(p^m) = m\ell(p)$.

(d) Que dire des relations précédentes dans le cas où p ou p' vaut 1 ?

10. Soit p et p' deux entiers tels que $1 \leq p < p'$.

(a) Montrer que $\frac{1}{p+1} \leq \ell(p+1) - \ell(p) \leq \frac{1}{p}$.

(b) En déduire que $\frac{p'-p}{p'} \leq \ell(p') - \ell(p) \leq \frac{p'-p}{p}$.

Partie III : Prolongement de ℓ aux nombres rationnels

Pour tout nombre rationnel $r > 0$, égal à une fraction $\frac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\ell(r) = \ell(p) - \ell(q)$.

- Démontrer que $\ell(r)$ est bien défini, c'est-à-dire que le résultat ne dépend pas de la fraction choisie pour représenter r .
- Montrer que la fonction ℓ ainsi définie vérifie, pour tous rationnels strictement positifs r et r' , $\ell(rr') = \ell(r) + \ell(r')$ et $\ell\left(\frac{r}{r'}\right) = \ell(r') - \ell(r)$.
- Montrer que, pour tous rationnels $0 < r < r'$, $0 < \frac{r'-r}{r'} \leq \ell(r') - \ell(r) \leq \frac{r'-r}{r}$.

Partie IV : Prolongement de ℓ aux nombres réels

On considère x et x' deux réels strictement positifs.

- On pose $X = \{\ell(r) ; r \in \mathbb{Q} \cap]0, x]\}$. Démontrer que X admet une borne supérieure. On note $\ell(x) = \sup X$.
- Montrer que, dans le cas où x est rationnel, cette définition de ℓ coïncide bien avec la précédente.
- Montrer que si (r_n) est une suite croissante de rationnels strictement positifs qui converge vers x alors la suite $(\ell(r_n))$ converge vers $\ell(x)$.
- Démontrer qu'il existe bien une suite croissante de rationnels strictement positifs qui converge vers x .
- Montrer que $\ell(xx') = \ell(x) + \ell(x')$.
- Montrer que si $0 < x < x'$ alors $\frac{x'-x}{x'} \leq \ell(x') - \ell(x) \leq \frac{x'-x}{x}$.
- Montrer que la fonction $\ell : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que ℓ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, $\ell'(x) = \frac{1}{x}$.
- Conclusion au sujet de la fonction ℓ ?