

Partie 1 – Étude de la série

1. Soit $k \geq 2$, $k^2 > k(k-1) > 0$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2} > 0$$

et

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

La série télescopique de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ converge.

Avec le critère de comparaison, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

De plus, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\zeta(2) \leq 2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$.

- $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante (strictement).
- $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$ donc $(T_n)_{n \geq 1}$ est décroissante (strictement).
- $T_n - S_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Ainsi $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes et convergent vers une même limite. Avec la question précédente, cette limite est $\zeta(2)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq \zeta(2) \leq T_n$ donc $0 \leq S_n - \zeta(2) \leq \frac{1}{n}$.

Ainsi $S_{10} \leq \zeta(2) \leq T_{10}$ est un encadrement à 10^{-1} près de $\zeta(2)$.

3. La fonction $f : t \in [1, +\infty[\rightarrow \frac{1}{t^2}$ étant décroissante et continue, par comparaison série intégrale, on peut écrire pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

puis en sommant

$$S_n \leq f(1) + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(t) dt = \frac{1}{1^2} + \int_1^n \frac{dt}{t^2} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Donc $(S_n)_n$ est majorée et comme la série est à termes positifs, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (et on retrouve $\zeta(2) \leq 2$).

4. On admet dans cette question que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toujours revenir aux sommes partielles pour ne pas risquer de considérer des sommes de séries non convergentes.

- Notons $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2}$ $A_n = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} S_n$

La série de terme général $\frac{1}{(2n)^2}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{24}$

■ Notons $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$; $B_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = S_{2n+1} - A_n$

(B_n) converge comme différence de suites convergentes et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \zeta(2) - \frac{1}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$.

■ Notons $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

$\sum_{k=1}^n \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge. Par théorème de convergence absolue, $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ converge.

$$C_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)^2} = B_n - A_n$$

(C_{2n+1}) converge comme différence de suites convergentes et $C_{2n+1} \rightarrow \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$

(C_n) étant une suite convergente, elle converge vers la limite de chacune de ses suites extraites.

Ainsi $C_n \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie 2 – Calcul par les intégrales de Wallis

1. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 t dt = \frac{\pi}{2}$ et $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \frac{\pi^3}{24}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \times \cos^{2n+1}$.

$\sin$ et $\cos^{2n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En intégrant par parties en dérivant $\cos^{2n+1}$,

$$I_{n+1} = \left[\sin \times \cos^{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+1) \sin^2 \cos^{2n} = 0 + (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2) \cos^{2n} = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2n} - \cos^{2(n+1)})$$

Il vient $I_{n+1} = (2n+1)(I_n - I_{n+1})$ d'où $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec la question précédente, $I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} \frac{\pi}{2}$ donc $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

4. Soit $n \geq 1$. On effectue une première intégration par parties

$$I_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos^{2n}(t) dt = \left[t \cos^{2n}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t 2n \cos^{2n-1}(t) (-\sin(t)) dt = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos^{2n-1}(t) dt$$

puis une seconde intégration par parties :

$$I_n(x) = 2n \left[\frac{t^2}{2} \sin(t) \cos^{2n}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} (\cos(t) \cos^{2n-1}(t) - \sin^2(t) (2n-1) \cos^{2n-2}(t)) dt.$$

Par linéarité,

$$I_n(x) = -2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \cos^{2n}(t) dt + 2n(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} (1 - \cos^2(t) \cos^{2n-2}(t)) dt$$

Avec la définition, $J_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt$ et

$$I_n(x) = -n J_n(x) + n(2n-1)(J_{n-1}(x) - J_n(x)) = -n J_n(x) + n(2n-1) J_{n-1}(x) - 2n^2 J_n(x) + n J_n(x)$$

On obtient enfin $I_n(x) = n(2n-1)J_{n-1}(x) - 2n^2 J_n(x)$

5. Avec les deux questions précédentes,

$$\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$

En multipliant par $\frac{4^n((n-1)!)^2}{2(2n)!}$, on obtient

$$\frac{\pi}{4n^2} = \frac{4^n((n-1)!)^2}{2(2n)!} \cdot \frac{2n(2n-1)}{2} J_{n-1} - \frac{4^n((n-1)!)^2}{2(2n)!} 2n^2 J_n = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!} J_{n-1} - \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} J_n$$

Ainsi, $K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}.$

6. Par télescopage, $\sum_{j=1}^n (K_{j-1} - K_j) = K_0 - K_n$. Avec la question précédente, $\sum_{j=1}^n \frac{\pi}{4j^2} = K_0 - K_n$.

Or $K_0 = J_0$. En factorisant, $\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$.

7. En étudiant la fonction $t \mapsto \frac{\pi}{2} \sin t - t$ (en la dérivant deux fois) ou, mieux, par une inégalité de concavité de $\sin$ ($y = \frac{2}{\pi}x$ est l'équation de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\pi/2$ qui se situe sous la courbe entre ces points), on obtient

$$\text{Pour tout } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], t \leq \frac{\pi}{2} \sin t.$$

8. Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a alors $t^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t$. En multipliant par $\cos^{2n}(t) \geq 0$, $t^2 \cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2(t) \cos^{2n}(t)$.

Par croissance et linéarité de l'intégrale sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, dt \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^{2n}(t) \, dt$.

Or $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} - \cos^{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \sin^2$. Ainsi, $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+1})$.

Avec la question 2, $I_n - I_{n+1} = I_n - \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{1}{2n+2} I_n$. On obtient alors $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)} I_n$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec la question précédente et la question 3, $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

En multipliant par $\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} > 0$ avec $K_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} J_n$, on obtient $0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec les questions 6 et 3, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{4} (J_0 - K_n) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{24} - K_n \right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi} K_n$.

Avec la question précédente et par encadrement, $K_n \rightarrow 0$.

Ainsi $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

Partie 3 – Calcul par des polynômes

1. On remarque que $P_n = \overline{P_n}$ (on ne conjugue que les coefficients, bien sûr) donc $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

On a, comme somme de deux polynômes de degré $2n+1$, que $\deg P_n \leq 2n+1$. Le terme en X^{2n+1} est $\frac{X^{2n+1} - X^{2n+1}}{2i} = 0$, et par le binôme, celui en X^{2n} est $\frac{\binom{2n+1}{1}iX^{2n} - \binom{2n+1}{1}(-i)X^{2n}}{2i}$ ie $(2n+1)X^{2n}$. Donc $\deg P_n = 2n$ et $\text{cd}(P_n) = 2n+1$.

On peut aussi voir tout cela en utilisant la formule du binôme :

$$P_n = \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k X^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k i^k X^{2n+1-k} \right).$$

Comme les termes d'indice pair s'annulent dans les deux sommes, on obtient alors, en écrivant $k = 2p+1$,

$$P_n = \frac{1}{i} \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} X^{2n+1-(2p+1)} = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{2(n-p)}.$$

ce qui redonne les trois résultats.

2. z est racine de P_n si et seulement si $(z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1}$. Comme $i(\neq 0)$ n'est pas solution, c'est équivalent à $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1$ soit encore $(*) \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$ où $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$. On peut éliminer $k = 0$ car cela ne donne aucune solution en z . Or

$$(*) \iff (z+i) = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}(z-i) \iff z = i \frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1} = i \frac{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} + e^{-\frac{ik\pi}{2n+1}}}{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} - e^{-\frac{ik\pi}{2n+1}}} = \cotan \frac{k\pi}{2n+1} = x_k.$$

On en déduit que P_n possède $2n$ racines : les $\cotan \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$.

3. Vu l'expression trouvée dans la première question, si $Q_n = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{n-p}$, alors $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et

$P_n = Q_n(X^2)$. On a alors $\deg Q_n = n$ et $\text{cd}(Q_n) = 2n+1$.

Le coefficient de degré $n-1$ est $-\binom{2n+1}{3} = -\frac{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)}{6} = -\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

De plus, si z est racine de P_n , z^2 est racine de Q_n . Ainsi, d'après la question précédente, les $\cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ sont racines de Q_n .

Mais pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 < k \leq n$ donc $0 < \frac{k\pi}{2n+1} \leq \frac{n}{2n+1}\pi < \frac{\pi}{2}$, et $\cotan^2 = \frac{1}{\tan^2}$ est injective sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ (car strictement décroissante).

Cela donne donc n racines deux à deux distinctes d'un polynôme de degré n : on les a toutes.

Les racines de Q_n sont donc les $\cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

4. $S_n = \sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ est la somme des racines de Q_n (qui est scindé dans $\mathbb{C}$ et même dans $\mathbb{R}$ car il a n racines réelles et est de degré n). Donc si on note q_i ses coefficients,

$$S_n = -\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{\binom{2n+1}{3}}{2n+1} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)}$$

donc $S_n = \frac{n(2n-1)}{3}$.

Or si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cotan^2 x = \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.

Donc $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = S_n + n$. Donc $T_n = \frac{2n(n+1)}{3}$.

5. De simples études de fonctions, ou l'intégration de $\cos t \leq 1 \leq 1 + \tan^2 t$ sur $[0, x]$, ou encore la convexité/concavité et l'équation de la tangente commune en 0 ($y = x$) permettent d'obtenir

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \sin x \leq x \leq \tan x.$$

Avec la question précédente, on a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, comme tout est positif,

$$\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \leq \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)^2 \leq \tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Comme de plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} \leq \left(\frac{2n+1}{k\pi} \right)^2 \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.

En sommant, on obtient $S_n \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq T_n$.

Ainsi,

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} S_n = \pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \pi^2 \frac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} T_n.$$

Finalement, par encadrement, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie 4 – Calcul par le noyau de Dirichlet

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Avec la formule trigonométrique $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin(b+a) - \sin(b-a)$,

il vient $2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sin \frac{(2k+1)x}{2} - \sin \frac{(2k-1)x}{2}$.

2. **Méthode 1** Par récurrence, $x \notin 0[2\pi]$ donc $\sin \frac{x}{2} \neq 0$.

■ $D_0(x) = \frac{1}{2} = \frac{\sin((0 + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}}$

■ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}}$.

$$D_{n+1}(x) = D_n(x) + \cos((n+1)x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x) + 2 \sin \frac{x}{2} \cos((n+1)x)}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

Avec la question précédente, $D_{n+1}(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x) + \sin \frac{(2n+3)x}{2} - \sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin((n+1) + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$.

■ Ainsi, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}}$.

Méthode 2 A l'aide d'une somme télescopique.

En sommant la relation $2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sin \frac{(2k+1)x}{2} - \sin \frac{(2k-1)x}{2}$ pour k décrivant $\llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient après télescopage et factorisation

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{(1)x}{2}.$$

Donc, avec la définition de $D_n(x)$,

$$2 \sin \frac{x}{2} (D_n(x) - \frac{1}{2}) = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \frac{x}{2}.$$

D'où $D_n(x) = \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}}$

Méthode 3 Calcul d'une somme géométrique.

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \neq 0[2\pi]$, on a $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right)$.

Avec la formule de Moivre et comme $e^{ix} \neq 1$, $\sum_{k=1}^n e^{ikx} = \sum_{k=1}^n (e^{ix})^k = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}$.

Or $1 - e^{inx} = e^{i \frac{nx}{2}} (e^{-i \frac{nx}{2}} - e^{i \frac{nx}{2}}) = -2ie^{i \frac{nx}{2}} \sin \frac{nx}{2}$ et $1 - e^{ix} = -2ie^{i \frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2}$.

Ainsi, $\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{i \frac{(n+1)x}{2}} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$. Puis, en prenant la partie réelle, $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \cos \left(\frac{(n+1)x}{2} \right) \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$.

D'où $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin \frac{1}{2}x + 2 \sin \frac{nx}{2} \cos \left(\frac{(n+1)x}{2} \right)}{2 \sin \frac{1}{2}x}$.

Or $2 \sin \frac{nx}{2} \cos \left(\frac{(n+1)x}{2} \right) = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(-\frac{1}{2} \right) x$, d'où $D_n(x) = \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}}$

3. En intégrant par parties, pour tout entier $k \geq 1$, $\int_0^\pi x \cos(kx) dx = \left[x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k} dx = 0 + \left[\frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^\pi$

d'où $\int_0^\pi x \cos(kx) dx = \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$.

Puis $L_n = \int_0^\pi x D_n(x) dx = \int_0^\pi \left(\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n x \cos(kx) \right) dx = \int_0^\pi \frac{x}{2} dx + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi x \cos(kx) dx$ par linéarité.

Avec le calcul de la question précédente, $L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}$.

4. (a) Au voisinage de 0, $\sin x \sim x$ et $\frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \sim \frac{x}{\frac{x}{2}} \sim 2$, donc $x \mapsto \frac{x}{\sin \frac{x}{2}}$ est prolongeable par continuité en 0 en une fonction f en posant $f(0) = 2$.

(b) En effectuant un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0

$$\sin x - x \cos x = x - \frac{x^3}{6} - x \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + o_{x \rightarrow 0}(x^3) = \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

Ainsi $\sin x - x \cos x \sim \frac{x^3}{3}$

(c) f est dérivable sur $]0, \pi]$ et $\forall x \in]0, \pi]$, $f'(x) = \frac{\sin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

Or on a $\sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4}$ et avec la question précédente, $f'(x) \sim \frac{x^3}{24} \frac{4}{x^2} \sim \frac{x}{6}$.

On a donc que f continue en 0, dérivable sur $]0, \pi]$, $f'(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. Par théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

Comme par ailleurs f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$, on en déduit que

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et $f'(0) = 0$.

5. ϕ et $x \mapsto -\frac{\cos \lambda x}{\lambda}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. En intégrant par parties,

$$\int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx = \left[-\phi(x) \frac{\cos \lambda x}{\lambda} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \phi'(x) \frac{\cos \lambda x}{\lambda} dx$$

$$\text{Donc } \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx = \frac{-\phi(\pi) \cos(\lambda \pi) + \phi(0)}{\lambda} + \int_0^\pi \phi'(x) \frac{\cos \lambda x}{\lambda} dx.$$

Par inégalité triangulaire intégrale (licite car $\pi > 0$), $\left| \int_0^\pi \phi'(x) \frac{\cos \lambda x}{\lambda} dx \right| \leq \int_0^\pi |\phi'(x)| \frac{|\cos \lambda x|}{\lambda} dx \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi |\phi'(x)| dx$.

Puis, par inégalité triangulaire,

$$0 \leq \left| \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq \frac{|\phi(\pi)| + |\phi(0)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi |\phi'(x)| dx \leq \frac{1}{\lambda} \left(|\phi(\pi)| + |\phi(0)| + \int_0^\pi |\phi'(x)| dx \right).$$

Ainsi $\int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

6. Avec la question 4, f est de $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Or $L_n = \int_0^\pi x D_n(x) dx = \int_0^\pi f(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$.

Comme $n + \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, avec la question précédente, $L_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\text{Puis } \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1 - (-1)^k}{k^2} = \sum_{k=0}^n \frac{2}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{2}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k)^2} = 2S_{2n+1} - \frac{1}{2}S_n.$$

$$\text{Donc avec la question 3, } L_{2n+1} = \frac{\pi^2}{4} - 2S_{2n+1} + \frac{1}{2}S_n.$$

Reste à faire $n \rightarrow +\infty$, ce qui permet d'obtenir $0 = \frac{\pi^2}{4} - 2\zeta(2) + \frac{1}{2}\zeta(2)$ et enfin $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.