

DEVOIR LIBRE 1

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier encadrer les réponses, tirer un trait entre les questions et répondre de manière concise (mais complète).

Problème : Autour de $\zeta(2)$

Le but de ce problème est d'établir par divers méthodes la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ (partie 1), puis de calculer de plusieurs façons différentes le nombre $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (parties 2 à 4 : il ne faudra pas utiliser la valeur de $\zeta(2)$ dans ces parties!) puis d'en voir une application (partie 5). Les différentes parties sont complètement indépendantes.

Partie 1 – Étude de la série

Les questions sont indépendantes.

- Justifier que si $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, en déduire la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ puis un majorant de $\zeta(2)$.
- Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n}$. Montrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes et en déduire un encadrement à 10^{-1} près de $\zeta(2)$.
- Retrouver la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ par comparaison à une intégrale.
- On admet¹ dans cette question que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Justifier la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et calculer les valeurs exactes de leur somme.

Partie 2 – Calcul par les intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, dt$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, dt$ et $K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$.

- Calculer les intégrales I_0 et J_0 .
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

¹ calculé dans les parties suivantes.

- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.
- Soit $n \geq 1$. Montrer qu'on a la relation $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.
- En déduire $K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$.
- Démontrer la relation $\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$.
- Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$.
- En déduire que pour tout entier n , on a $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+1})$, puis $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$.
- En déduire que pour tout entier n , on a $0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$.
- En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

Partie 3 – Calcul par des polynômes

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}}{2i}$.

- Montrer que P_n est un polynôme à coefficients réels. Quels sont son degré et son coefficient dominant?
- Déterminer les racines (complexes) de P_n et vérifier qu'elles sont toutes réelles. On trouvera, après simplification, qu'il s'agit des $x_k = \cotan \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, où $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$.
- Montrer qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n = Q_n(X^2)$. Déterminer le degré d_n de Q_n , ses coefficients de degré d_n et $d_n - 1$, ainsi que ses racines.
- En déduire que $S_n = \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$ puis calculer $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.
- Montrer que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \leq x \leq \tan x$ et en déduire $\zeta(2)$.

Partie 4 – Calcul par le noyau de Dirichlet

Pour tout entier $n \geq 1$, on note D_n le **noyau de Dirichlet** défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

- Linéariser, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx)$.
- Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \notin 0[2\pi]$, on a $D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}}$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $L_n = \int_0^\pi x D_n(x) dx$. En calculant l'intégrale $\int_0^\pi x \cos(kx) dx$ pour tout entier $k \geq 1$, montrer que $L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}$.
4. On note f le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle $]0, \pi]$ par $x \mapsto \frac{x}{\sin \frac{x}{2}}$.
- (a) Calculer $f(0)$.
- (b) Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $\sin x - x \cos x$.
- (c) En déduire que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.
5. Soit $\phi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.
6. Montrer que $L_n \rightarrow 0$ et en déduire $\zeta(2)$.

Partie 5 – Application au calcul d'une somme double

L'objectif de cette partie est de calculer la limite de la somme double

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{1}{nm(n+m-1)} \right).$$

On pose pour tout entier $N \geq 1$, $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$.

1. Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, $\ln(1+N) \leq H_N \leq 1 + \ln N$.
2. Montrer que pour tout entier $M \geq 2$, $\sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^M \frac{1}{m^2} - \frac{H_M}{M}$.
3. En déduire que la série $\sum_{m \geq 1} \frac{H_m}{m(m+1)}$ converge et déterminer sa limite.
4. Pour tout entier $m \geq 2$ et tout entier $N \geq 1$, on pose $Z_{N,m} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+m-1)}$.
- (a) Montrer que $Z_{N,m} = \frac{1}{m-1} \left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} \right)$.
- (b) En déduire que $Z_{N,m} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{H_{m-1}}{m-1}$.
5. Montrer que pour tout $N \geq 1$ et tout $M \geq 2$, $\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{1}{nm(n+m-1)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^M \frac{Z_{N,m}}{m}$.
6. En déduire $\lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{1}{nm(n+m-1)} \right)$.

FIN DE L'ÉNONCÉ