

Programme de colle – MPI

1. Suites, analyse asymptotique, continuité, continuité uniforme, dérivation, convexité, intégration sur un segment des fonctions numériques (MP2I)

- Révisions du programme de MP2I. Voir page suivante.
- En particulier, étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, exemples de développements asymptotiques.
- Le **théorème de Cesàro** a été énoncé, et sera démontré à l'aide du théorème sur la sommation des relations de comparaisons dans le chapitre sur les séries.
- La notion de **valeur d'adhérence** est introduite sans aucun développement pour le moment.
- La **caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité** est utile en particulier pour démontrer une absence d'uniforme continuité.
- Le **théorème de Heine** permet en particulier de démontrer le théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.
- La fonction racine carrée est un exemple d'application uniformément continue (car $1/2$ -hölderienne) mais non lipschitzienne.
- Calculs de primitives, intégrales sur un segment des fonctions numériques. Formules de Taylor.
- L'**inégalité de Cauchy-Schwarz** est revue à cette occasion, pour être utilisée avec les intégrales.

Semaine prochaine : Pas de colle. Semaine suivante : intégrales généralisées, séries.

2. Questions de cours

- Formulaire de développements limités** : $\exp, \cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}, (1+x)^\alpha, \frac{1}{1 \pm x}, \ln(1 \pm x), \operatorname{Arctan}$ à tous ordres ; $\tan$ et th à l'ordre 7.
- Intégrales de Wallis** : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$: relation de récurrence, monotonie, $(n I_n I_{n-1})$ est constante, équivalent.
- Théorème de Rolle** (preuve prise dans le cours de première année). **Théorème des accroissements finis**.
- Inégalité de Jensen** (preuve prise dans le cours de première année).
- Énoncer les trois **formules de Taylor**.
- Exercices CCINP** : 3, 4, 43, 55, 76, 79.

3. Exercices CCINP

■ CCINP 3

- On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
- On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
- Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

■ CCINP 4

- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$. Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)$.
- Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Rightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

■ CCINP 43 : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

- Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
 - Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

■ CCINP 55 : Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2a u_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$$

avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

- Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
 - Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .

■ CCINP 76 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.

On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

- Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 - Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble

$$\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

■ **CCINP 79** : Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4. Programme de MP2I

Extrait du programme officiel :

A. Suites

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
b) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite. Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient. Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell, \lim u_n$. Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Utilisation d'une majoration de la forme $ u_n - \ell \leq v_n$, où (v_n) converge vers 0.
c) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
d) Suites extraites	
Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ , alors (u_n) tend vers ℓ . Principe de démonstration par dichotomie.
e) Traduction séquentielle de certaines propriétés	
Partie dense de $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels. Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non majorée).
Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
f) Suites complexes	
Breve extension des définitions et résultats précédents. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
g) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques. Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants. Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions. Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n) , on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f .

B. Analyse asymptotique

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbb{R}$. Lien entre ces relations.	Notations $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x)), f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)), f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$. La relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ et $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \rightarrow 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^\beta(x)$, x^α , e^{rx} en $+\infty$, de $\ln^\beta(x)$, x^α en 0. Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O . Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leq g \leq h$ et si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a .
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp$, $\sin$, $\cos$, sh , ch , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^a$, Arctan . Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan$. Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	

c) Relations de comparaison : cas des suites

Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.
---	--

d) Problèmes d'analyse asymptotique

Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales. Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme. La démonstration n'est pas exigible.
---	--

C. Continuité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue. Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.	Principe de démonstration par dichotomie. La démonstration n'est pas exigible.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.
Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.
Continuité uniforme	
Continuité uniforme. Théorème de Heine.	Exemple des fonctions lipschitziennes. La démonstration n'est pas exigible.

D. Dérivation

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Dans ce cas $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$
	Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $ f' $ est majorée par K , alors f est K -lipschitzienne.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a .
d) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
---	---

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Fonctions complexes	
Breve extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

E. Convexité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$. Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I , on a l'inégalité	Interprétation géométrique. Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$	
quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1, \dots, x_n$ de I . Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	
b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables. Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	

F. Intégration sur un segment

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f , $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) \, dt$ a pour dérivée f . On pourra noter $\int_{}^x f(t) \, dt$ une primitive générique de f . Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Intégration par parties, changement de variable.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Fonctions continues par morceaux

Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.
---	---

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) \, dt$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left \int_{[a,b]} f \right \leq \int_{[a,b]} f $.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t) \, dt$ au cas où $b \leq a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$. Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Sommes de Riemann

Pour f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$,	Interprétation géométrique. Démonstration exigible pour f lipschitzienne.
--	--

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \, dt.$$

Lien entre intégrale et primitive

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$ pour f continue.	
Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	

Formules de Taylor globales

Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.	L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.
--	---