

ORAL BLANC N° 4 : MINES-TELECOM

1

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang de A , sans calcul, son image et son noyau.

A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser en minimisant les calculs.

2

On considère une suite $(X_i)_i$ de variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

On définit la variable aléatoire S_m par

$$S_m = k \iff X_1 + \dots + X_k = m \quad \text{et} \quad X_1 + \dots + X_{k-1} < m$$

1. Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1 .
2. Montrer que, pour $m \geq 2$, $S_m - S_{m-1}$ et S_1 suivent la même loi.
3. Déterminer la fonction génératrice de S_m , puis la loi de S_m .

ORAL BLANC N° 3 : CCINP

1

Banque CCINP 76

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble

$$\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

2

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ définie sur $]0, +\infty[$, et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1. Montrer que S est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer $S(1)$. Montrer que $xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1)$.
3. Montrer que $S(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ en 0^+ .
4. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1 Banque CCINP 61

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|.$$

1. Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq n \|A\| \|B\|.$$

Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geq 1$,

$$\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p.$$

3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente. Est-elle convergente ?

2 Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ définie sur $]0, +\infty[$, et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1. Montrer que S est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer $S(1)$. Montrer que $xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1)$.
3. Montrer que $S(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ en 0^+ .
4. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$.