

1

Banque CCINP 58

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $a \in E$ et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Donner la définition de « f différentiable en a ».

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

On pose $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $\forall (x, y) \in E \times E, \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.

On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.

Soit $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E .

- (a) Prouver que

$$\exists C \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in E \times E, |B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty.$$

- (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

- Montrer que $AB^k - B^k A = k B^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $\det(B^k) \det(A - k I_n) = \det(A) \det(B^k)$.
- Si B est inversible et λ valeur propre de A , montrer que $\lambda + 1$ est aussi valeur propre de A . En déduire que $\det(B) = 0$.
- Trouver deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

1 Banque CCINP 31

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

1. Montrer que $AB^k - B^k A = kB^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\det(B^k) \det(A - kI_n) = \det(A) \det(B^k)$.
3. Si B est inversible et λ valeur propre de A , montrer que $\lambda + 1$ est aussi valeur propre de A . En déduire que $\det(B) = 0$.
4. Trouver deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

3 Avec préparation de 15 minutes

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Soit $n \geq 2$.

2. On note $P = \sum_{i=1}^n a_i X^i$ le projeté orthogonal de -1 sur $\text{Vect}(X^i)_{1 \leq i \leq n}$.

Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$1 + \sum_{i=1}^n a_i (k+1)(k+2) \dots (k+i) = 0$$

puis exprimer a_i .

3. En déduire :

$$\inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 + a_1 t + \dots + a_n t^n)^2 dt$$

4 Sans préparation

Pour $n \geq 1$, on note $E = \{1, \dots, n\}$. On dit qu'un couple (A, B) de parties de E vérifie $(\star)$ ssi

$$\forall a \in A, a \geq |B| \quad \text{et} \quad \forall b \in B, b \geq |A|$$

On note t_n le nombre de couples vérifiant $(\star)$.

1. Exprimer t_n à l'aide d'une somme.

On définit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t_n x^n$.

2. Montrer que f admet un rayon de convergence non nul.

3. Montrer que

$$\{(i, j, n) \in \mathbb{N}^3, i + j \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{(i, j, n) \in \mathbb{N}^3, n = i + j + k\}$$

4. En déduire une expression simple de $f(x)$.