

ORAL BLANC N° 1 : MINES-PONTS

1 Avec préparation de 15 minutes

Soit E un espace euclidien.

1. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que, pour tout $x \in E$:

$$\langle u(x), x \rangle = 0 \iff x \in \text{Ker } u$$

2. Soit $a, b \in \mathcal{S}^+(E)$.

(a) Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $h^2 = b$.

(b) Soit $f = ab$ et $g = hah$. Montrer que g est diagonalisable et que f et g ont les mêmes valeurs propres et des espaces caractéristiques de la même dimension. Qu'en déduire pour f ?

2 Sans préparation

Déterminer une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1

1. ne convergeant pas pour $z \in \mathbb{U}$;
2. convergeant pour $z \in \mathbb{U}$;
3. convergeant pour $z \in \mathbb{U}$ sauf pour $z = 1$.

ORAL BLANC N° 1 : MINES-PONTS

1 Avec préparation de 15 minutes

Soit E un espace euclidien.

1. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que, pour tout $x \in E$:

$$\langle u(x), x \rangle = 0 \iff x \in \text{Ker } u$$

2. Soit $a, b \in \mathcal{S}^+(E)$.

(a) Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $h^2 = b$.

(b) Soit $f = ab$ et $g = hah$. Montrer que g est diagonalisable et que f et g ont les mêmes valeurs propres et des espaces caractéristiques de la même dimension. Qu'en déduire pour f ?

2 Sans préparation

Déterminer une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1

1. ne convergeant pas pour $z \in \mathbb{U}$;
2. convergeant pour $z \in \mathbb{U}$;
3. convergeant pour $z \in \mathbb{U}$ sauf pour $z = 1$.