

(54)

$$1) A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ -1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ -1/a & 2 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 2 \end{pmatrix}$

donc  $A^2 = A + 2I_3$

donc  $A^2 - A - 2I_3 = 0$

Donc  $A$  annule le polynôme  $X^2 - X - 2I_3 = (X-2)(X+1) = P(X)$   
qui est scindé car on a deux racines distinctes 2 et -1.

donc  $A$  est diagonalisable.

$$\left( \begin{array}{l} \text{et } \text{Sp}(A) \subset \{2, -1\} \\ \text{or } \text{tr}(A) = 0 = 2 + (-1) + (-1) \\ \text{donc } \text{Sp}(A) = \{2, -1\} \end{array} \right)$$

2) On  $A^2 - A - 2I_3 = 0$

avec  $P(X) = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$

par division euclidienne  $\forall n \in \mathbb{N}$  il existe  $Q_n, R_n \in \mathbb{R}[X]$

$$X^n = P(X) Q_n(X) + R_n(X) \text{ avec } \deg(R_n(X)) < \deg(P(X)) = 2$$

donc  $R(X) = a_n X + b_n$  avec  $a_n$  et  $b_n$  des réels à déterminer

Eq  $R_n(2) = 2^n$  et  $R_n(-1) = (-1)^n$

$$\text{d'où } \begin{cases} 2a_n + b_n = 2^n \\ -a_n + b_n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_n = 2^n - (-1)^n \\ -a_n + b_n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{cases}$$

Ainsi  $A^n = \frac{2^n - 2(-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3$

On a donc  $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - (-1)^n}{n!} A + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 2(-1)^n}{n!} I_3 \right)$$

$$e^A = \frac{e^2 - e^{-1}}{3} A + \frac{e + 2e^{-1}}{3} I_3$$