

EXERCICE 47 :

$$1. \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= 5A - 4I_3$$

i.e. $A^2 = 5A - 4I_3$

2. A est une matrice symétrique réelle donc

A est diagonalisable

on a : $\chi_A = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -x+1 & x-1 & 0 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$= \begin{vmatrix} x-2 & x-3 & -1 \\ -x+1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & x-2 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_1$$

Det % L_2 :

$$\chi_A = -(-x+1) [(x-3)(x-2) - 2]$$

$$= (x-1) [x^2 - 2x - 3x + 6 - 2]$$

$$= (x-1) [x^2 - 5x + 4]$$

$$= (x-1)(x-4)(x-1)$$

donc $\chi_A = (x-1)^2(x-4)$ i.e. 1 et 4 sont valeurs propres

$$\bullet \underline{A - 4I_3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } E_4(A) = \text{vect}((1, 1, 1))$$

$$\bullet \underline{A - I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_1 - C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_2 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } E_1(A) = \text{vect}((1, -1, 0), (0, 1, -1))$$

ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. on pose $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$

$$\text{i.e. } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{BC = O_3 \text{ et } CB = O_3}$$

soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$B^2 = 3B \text{ et } B^3 = 9B$$

Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$H(n) : \ll B^n = 3^{n-1} B \gg$$

Initialisation: $n = 1$

$$B^1 = 3^0 B \quad \text{ok!} \quad \text{donc } H(1) \text{ est vrai.}$$

Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}^*$

- on suppose $H(n)$ vrai
- montrons que $H(n+1)$ est vrai

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^n \cdot B \\ &= 3^{n-1} B \cdot B \quad \downarrow \text{HdR} \\ &= 3^{n-1} B^2 \\ &= 3 \cdot B \quad \downarrow B^2 = 3 \cdot B \end{aligned}$$

donc $H(n+1)$ est vrai.

Conclusion: par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B^n = 3^{n-1} B$$

Ici, il aurait fallu remarquer que $C^2 = -3 C$
donc, pour $n > 1$, $C^n = (-3)^{(n-1)} C$.

$$\begin{aligned} \text{puis, } C &= A - 4I_3 \\ &= P D P^{-1} - 4I_3 \\ &= P D P^{-1} - 4 P I_3 P^{-1} \\ &= P (D - 4I_3) P^{-1} \end{aligned}$$

donc

$$\text{comme } D - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C^n = P (D - 4I_3)^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{on a : } B = A - I_3 \text{ et } C = A - 4I_3$$

$$\text{donc : } A = B + I_3 \text{ et } A = C + 4I_3$$

$$\text{d'où } I_3 = A - B$$

$$\text{donc } A = C + 4A - 4B$$

donc $-3A = C - 4B$

ainsi, $A = \frac{4B - C}{3}$

donc $A^n = \frac{1}{3^n} \cdot (4B - C)^n \dots$

Ici, il fallait utiliser les puissances de B et C calculées précédemment et $BC=CB=0$ avec le binôme...

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

soit $a, b, c \in \mathbb{R}$

on cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \alpha + 0 + \gamma = a \\ -\alpha + \beta + \gamma = b \\ 0 - \beta + \gamma = c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (=) \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \quad & \begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ 0 + \beta + 2\gamma = a + b \\ -\beta + \gamma = c \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (=) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad & \begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \beta + 2\gamma = a + b \\ 3\gamma = a + b + c \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (=) \quad & \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} (2a - b - c) \\ \beta = \frac{1}{3} (a + b - 2c) \\ \gamma = \frac{1}{3} (a + b + c) \end{cases} \end{aligned}$$

donc $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d'où

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4^n \\ -1 & 1 & 4^n \\ 0 & -1 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & 2+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & -1+4^n & 2+4^n \end{pmatrix}$$

Calcul correct même si ce n'est ce qui semblait attendu ici.