

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de probabilité de Y_n . En déduire $\mathbb{E}(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
2. Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i \neq j$. Calculer $\text{Cov}(Y_i, Y_j)$. La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ est-elle une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \frac{S_n}{n}$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(|Z_n - p^2| \geq a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

① $Y_n(\omega) = \{0, 1\}$

+ $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1) \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = p^2$ par indépendance

+ Donc $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 - p^2$

D'après le cours $\mathbb{E}(Y_n) = p^2$ et $V(Y_n) = p^2(1 - p^2)$

② Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tq. $i \neq j$. $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}(Y_i Y_j) - \mathbb{E}(Y_i) \mathbb{E}(Y_j)$
 $= \mathbb{E}(X_i X_{i+1} X_j X_{j+1}) - \mathbb{E}(Y_i) \mathbb{E}(Y_j)$

+ Si $i+1 = j$ ou $j+1 = i$,
 $\mathbb{E}(X_i X_{i+1} X_j X_{j+1}) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1}^2 X_j) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1} X_j)$ car $X_{i+1}^2(\omega) = X_{i+1}(\omega) = \{0, 1\}$
 $= \mathbb{E}(Y_i) \mathbb{E}(X_j)$ par indépendance
 $= p^3$

+ Si $i+1 \neq j$ ET $j+1 \neq i$,
 $\mathbb{E}(X_i X_{i+1} X_j X_{j+1}) = \mathbb{E}(Y_i) \mathbb{E}(Y_j)$ par indépendance
 $= p^4$

Donc $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \begin{cases} p^3 - p^4 = p^3(1-p) & \text{si } i+1 = j \text{ ou } j+1 = i \\ 0 & \text{si } i+1 \neq j \text{ ET } j+1 \neq i \end{cases}$

Donc $(Y_n)_{n \geq 1}$ n'est pas mutuellement indépendante car si $i+1 = j$ ou $j+1 = i$, $\text{Cov}(Y_i, Y_j) \neq 0$.

③ Par linéarité, $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k) = n p^2$

D'après le cours, $V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(Y_k) + 2 \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i+1 = j}} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$

$V(S_n) = n p^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)$ car $\{(i, j) ; 1 \leq i < j \leq n, i+1 = j, j+1 = i\} = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\} = n-1$

④ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{S_n}{n}$, $a > 0$, $Z_n \in \mathcal{L}^2$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev: $\mathbb{P}(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| \geq a) \leq \frac{V(Z_n)}{a^2}$

ie. $\mathbb{P}(|Z_n - \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n}| \geq a) \leq \frac{V(S_n)}{n^2 a^2}$

donc $\mathbb{P}(|Z_n - p^2| \geq a) \leq \frac{V(S_n)}{n^2 a^2} = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$