

Soit la fonction $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2. \end{cases}$

Déterminer les extremums locaux de la fonction f .

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ sur $\mathbb{R}^2$ ouvert.

Donc si f admet un extremum local en (x,y) , (x,y) est un point critique.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 & (C_1) \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 & (C_2) \end{cases}$$

$$(C_1) + (C_2): 4(x^3 + y^3) = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$(C_1): 4x^3 - 4(x+x) = 4(x^3 - 2x) = 0 \Rightarrow x^3 = 2x \Rightarrow x \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

Donc $(0,0)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sont les pt. critiques.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

+ $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ de déterminant 0. Donc on ne peut rien dire direction du point $(0,0)$.

On étudie deux directions :

$$+ f(x,x) - f(0,0) = 2x^4 > 0$$

$$+ f(x,-x) - f(0,0) = 2x^4 - 8x = 2x^2(x^2 - 4) \begin{cases} < 0 \text{ pour } x \in]-2; 2[\\ > 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On trouve deux signes opposés, donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local, $(0,0)$ point selle.

$$+ H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \text{ de déterminant } > 0 \text{ et trace } > 0,$$

donc $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sont des min locaux.