

(169)

1)

Soit $f \in E$, f' existe car $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc puisque $u \times f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ alors par addition $L_u(f) = f' + u \times f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = E$

donc $\forall f \in E, L_u(f) \in E$

$$\begin{aligned} \text{le plus si } \lambda \in \mathbb{R}, f, g \in E, L_u(f + \lambda g) &= (f + \lambda g)' + u(f + \lambda g) \\ &= (f' + \lambda g') + u(f + \lambda g) \\ &= (f' + u f) + \lambda (g' + u g) \\ &= L_u(f) + \lambda L_u(g) \end{aligned}$$

Donc L_u endomorphisme.

2)

$$\begin{aligned} \text{Soit } f \in E \quad (L_u \circ L_u)(f) &= L_u(f' + u f) \\ &= (f' + u f)' + u(f' + u f) \\ &= f'' + u' f + 2u f' + u^2 f \end{aligned}$$

$$\text{donc } \forall f \in E \quad (L_u \circ L_u)(f) = f'' + u' f + 2u f' + u^2 f$$

3) Si y est solution de l'équation

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0 \quad (H) \quad \text{sur } \mathbb{R} \text{ alors } y \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ et alors:}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) = -2x y'(x) - (x^2 + 1) y(x)$$

Donc f'' est dérivable de dérivée continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f^{(3)}(x) = -2x f'' - 2f' - 2x f - (x^2 + 1)f'$$

Inutile d'exhiber une formule. Dire simplement qu'on montre par récurrence (évidente) que pour tout n , f est n fois dérivable.

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) f^{(k)}(x) \text{ où } p_k \text{ fonction polynomiale.}$$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc $f \in E$

4)

Si h est solution de (H) alors h vérifie:

$$(L \circ p \circ L)(h) = 0 \text{ où } u = \text{id}_{\mathbb{R}}$$

On pose $y = L u(h)$ alors, $L u(y) = 0$ donc

$$y' + x y = 0 \text{ alors } \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } y: x \mapsto A e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Or $L u(h) = y$ donc $f' + x f = y$

Les solutions homogènes de cette équation sont les

$$h_\alpha: x \mapsto h e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ où } h \in \mathbb{R}.$$

Vous voulez dire "solutions de l'équation homogène associée" ?

On utilise ensuite la méthode de variation de la constante:

Si h est solution de la forme $h_\alpha: x \mapsto h(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$

Donner des noms aux équations éviterait les ambiguïtés !

alors, en réinjectant h_α dans l'équation précédente on obtient:

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - h(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + h(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = Ae^{-\frac{x^2}{2}}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = C$ donc $h: x \mapsto Cx$ convient.

Finalement les solutions de (H) sont les fonctions

$$0 \neq x \mapsto (Ax + B)e^{-\frac{x^2}{2}}$$