

EXERCICE 15 :

1. on cherche $B = ((e_1, e_2, e_3))$ tq :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)$

Attention : il faut expliquer comment choisir e_3 et pourquoi on obtient alors effectivement une base.

on a : $\begin{cases} f(e_1) = 0 \\ f(e_2) = e_1 \\ f(e_3) = e_2 \end{cases}$

or $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(f(x)) \neq 0$ et $f(f(f(x))) = 0$

on remarque que si $x = e_3$:

$$\begin{cases} f(f(e_3)) = f(e_2) = e_1 \neq 0 \\ f(f(f(e_3))) = f(e_1) = 0 \end{cases}$$

on pose donc $B = ((f^2(e_3), f(e_3), e_3))$.

2.

on a : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= I + N \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

or I_3 et N commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton.

$$B^n = (I + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k}$$

or $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$N^3 = 0_3$$

$$\begin{aligned} \text{donc } B^n &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + \binom{n}{2} N^2 \\ &= I_3 + nN + \frac{n!}{2!(n-2)!} N^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } B^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ on a : } \underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}}_{x_{n+1}} = B \underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}}_{x_n}$$

on remarque une suite géométrique

$$\text{donc } x_n = B^n x_0$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n}{2}(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n + \frac{n}{2} \cdot (n-1) \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} u_n = \frac{n}{2}(n+1) \\ v_n = n+1 \\ w_n = 1 \end{cases}$$