

Oraux Corrections : Exercice 135

Correcteur : Jouhoud Saïd Hassane

Relecteur : Bastien TECHER

Question 1:

Soit $x \in \mathbb{R}$

Si $x < 0$: $u_n(x) \rightarrow -\infty$, donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement

Si $x \geq 0$: On a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ $0 \leq \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)} = o(\frac{1}{n^2})$ avec $\frac{1}{n^2}$ terme général positif de série convergente (Critère de Riemann $2 > 1$)

donc par comparaison de série à terme général positif, $\sum u_n(x)$ converge

et $D = [0; +\infty[$

Question 2:

Soit $n \geq 2$

On étudie la fonction $u_n : x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$ sur D

on a $u'_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}(1-nx)}{\ln(n)}$

On dresse le tableau de variations

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$u'_n(x)$	+	0	-
$u_n(x)$	$\frac{1}{\ln(n)}$	$\frac{1}{n \ln(n) e}$	0

Donc $N_\infty(u_n) = \frac{1}{n \ln(n) e}$

Or $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge (critère de Bertrand), par comparaison série intégrale avec

$f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ continue et décroissante sur $[2; +\infty[$

Soit $k \geq 2$, alors

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

donc dans $[0; +\infty]$

$$\int_2^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)} \leq \int_2^{+\infty} f(t) dt + f(2)$$

et $\int_2^{+\infty} f(t) dt = [\ln(\ln(t))]_2^{+\infty} = +\infty$

alors par encadrement dans $[0; +\infty]$

$\sum N_\infty(u_n)$ diverge,

$\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D

Question 3: Soit $n \geq 2$

$\forall x \in D$, on a

$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{\ln(\textcolor{red}{k})} \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \begin{cases} \frac{x}{\ln(n+1)} \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or $\forall x \in D$, $e^x \geq 1+x$

donc $\forall x \in D$ $1 \geq e^{-x}(1+x)$

d'où $\forall x \in D$ $1 - e^{-x} \geq x e^{-x}$

Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[$

$$\textcolor{red}{|R_n(x)|} \leq \frac{x e^{-(n+1)x}}{\ln(n+1) x e^{-x}} = \frac{e^{-nx}}{\ln(n+1)} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$$

, indépendant de x et tend vers 0,

et pour $x = 0$ $R_n(0) = 0 \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$

Donc $\forall x \in D$ $R_n(x) \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \rightarrow 0$

Donc $N_\infty(R_n) \rightarrow 0$ donc (R_n) converge uniformément vers 0 sur D

donc $\sum u_n$ converge uniformément sur D