

## Oraux Corrections : Exercice 108

Correcteur : Bastien TECHER

Relecteur : Enzo WONG-YIN-KI

Question 1 :

On a  $N \in \mathbb{N}$  tq  $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} cd(P)x^{2N+1}$  donc  $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$ ,

Alors, par théorème des valeurs intermédiaires, on a  $a \in \mathbb{R}$  tq  $P(a) = 0$

or  $\forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(a)| \leq |P(a)|$  alors  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0}$

Question 2:

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par formule de Taylor avec reste intégral,

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ ,  
d'après la question précédente

alors

$$|f(x)| = \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{|x-a|^n}{n!} \left| \int_a^x |P(t)| dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

car  $\left| \int_a^x P(t) dt \right|$  ne dépend pas de  $n$  donc est constant et  $\frac{|x-a|^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  en **tout**

que **terme général de série exponentielle**, alors  $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0}$

**(ou juste par CC)**

Question 3:

Ce résultat ne se maintient pas si  $P$  est de degrés pair, par exemple avec

$P = X^2 + 2$  et  $f : x \mapsto 1$  on a bien

$\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$  pourtant  $f$  n'est pas la fonction nulle.