

Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} x+y & \equiv 4 & [11] \\ xy & \equiv 10 & [11] \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

On va supposer x, y racine de $P: t \mapsto at^2 + bt + c$

$$\begin{aligned} \text{donc } P(t) &= (t-x)(t-y) \\ &= t^2 - ty + xy - xt \\ &= t^2 - t(y+x) + xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or d'après l'énoncé} \quad & x+y \equiv 4 \quad [11] \\ \text{et} \quad & xy \equiv 10 \quad [11] \end{aligned}$$

on remplace dans notre polynôme, on a donc

$$t^2 - 4t + 10 \equiv 0 \quad [11]$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2 + 6 \equiv 0 \quad [11]$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2 - 16 \equiv 0 \quad [11]$$

42" (pour avoir une identité remarquable)

$$\Leftrightarrow (t-6)(t+2) \equiv 0 \quad [11]$$

Or $\frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}$ est un corps, donc intègre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \equiv 6 \quad [11] \\ \text{ou} \\ t \equiv -2 \quad [11] \end{cases}$$