

Correction Exercice 1

But : Si $m, n \in (\mathbb{N}^*)^2$, alors, $(X^n - 1) \mid (X^m - 1) \Leftrightarrow n \mid m$

On procède par double implication :

$\Rightarrow$ on suppose que $(X^n - 1) \mid (X^m - 1)$ alors

$\forall k \in [0; m-1]$, $\frac{z^k \tilde{h}}{m}$ racine de $X^m - 1$ car racine

de $X^n - 1$. Or les racines de $X^n - 1$ sont exactement les

$\frac{z^l \tilde{h}}{n}$ où $l \in [0; n-1]$.

Donc $\forall k \in [0; m-1]$, $\exists l \in [0; n-1]$ tel que $\frac{z^k \tilde{h}}{m} = \frac{z^l \tilde{h}}{n}$

$$\frac{z^k \tilde{h}}{m} = \frac{z^l \tilde{h}}{n} [z \tilde{h}]$$

En particulier pour $k=1$, il existe $l \in [0; n-1]$ tel que

$$\frac{z \tilde{h}}{m} = \frac{z^l \tilde{h}}{n} [z \tilde{h}]$$

Donc $z \tilde{h} \mid z \tilde{h} \left(\frac{1}{n} - \frac{l}{m} \right)$ Maladroit : vous ne devez pas écrire une relation de divisibilité entre réels !

Donc $\frac{1}{n} - \frac{l}{m}$ est un entier, or $\frac{1}{n} < 1$ et $-\frac{l}{m} \leq 0$

Donc $\frac{1}{n} - \frac{l}{m} < 1$ et $\frac{1}{n} > 0$ et $-\frac{l}{m} \geq -1$ donc

$\frac{1}{n} - \frac{l}{m} > -1$, donc $\frac{1}{n} = \frac{l}{m}$ et donc $m = ln$

Ainsi $n \mid m$.

⇐ On suppose $n \mid m$.

Puisque $n \mid m$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = kn$.

Donc $x^m - 1 = (x^n)^k - 1$ Qui se factorise classiquement par $x^n - 1$...

$$\text{Donc } \forall \ell \in [0; n-1], (x^m - 1) \left(e^{\frac{2\pi i \ell}{n}} \right) = \left(e^{\frac{2\pi i \ell}{n}} \right)^k - 1 = 1^k - 1 = 0$$

Donc toutes les racines de $x^n - 1$ sont des racines de multiplicité au moins 1 de $x^m - 1$.

Donc $x^n - 1$ et $x^m - 1$ étant scindés dans $\mathbb{C}[X]$, alors

$$(x^n - 1) \mid (x^m - 1)$$