1. Suites et séries numériques

1 ENS MPI 2025 (Alexis)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\forall\, n \geqslant 1,\quad S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Quelle est la limite de $(S_n)_n$? Majoration de la différence ? Le démontrer.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, 1-périodique.

   Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \left|S_n - \displaystyle\int_0^1 f\right| \leqslant \dfrac{C}{n^2}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^3$, 1-périodique.

   Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \left|S_n - \displaystyle\int_0^1 f\right| \leqslant \dfrac{C}{n^3}$.
4. Que dire si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodique ?

Solution de 1 : ENS MPI 2025 (Alexis)

1. C'est du cours : $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 f$ (sommes de Riemann) et

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad \left|S_n - \int_0^1 f\right| \leqslant M_1 \times (1-0) \times \underbrace{\frac{1}{n}}_{h} = \frac{M_1}{n}$$

   où $M_1 = \max\limits_{[0,1]} |f'|$ dont l'existence est assurée par le théorème des bornes atteintes.

   Preuve : soit $n \geqslant 1$,

$$\left|S_n - \int_0^1 f\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right| \mathrm{d}t$$

   L'inégalité des accroissements finis donne

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\quad \forall\, t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right],\quad \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right| \leqslant M_1\left|\frac{k}{n} - t\right| = M_1\left(t - \frac{k}{n}\right)$$

   donc

$$\left|S_n - \int_0^1 f\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M_1}{2n^2} = \boxed{\frac{M_1}{2n}}$$

   Remarque : on aurait pu directement majorer $t - \dfrac{k}{n}$ par $\dfrac{1}{n}$ et obtenir comme majorant $\dfrac{M_1}{n}$ final. On cherche dans ce corrigé à réduire les constantes, mais des majorations plus grossières seraient acceptées le jour de l'oral.
2. Pour f de classe $\mathscr{C}^2$, on veut améliorer l'approximation de $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right) - f(t)\right|$. On pense à la formule de Taylor avec reste intégral sur $\left[\dfrac{k}{n}, t\right]$ qui donne

$$\forall\, t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right],\quad f(t) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(t - \frac{k}{n}\right) + R_{k,n}(t)$$

   avec $R_{k,n}(t) = \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{t} (t-u) f''(u)\,\mathrm{d}u$, donc, en notant $M_2 = \max\limits_{[0,1]}|f''|$, $|R_{k,n}(t)| \leqslant M_2 \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{t}(t-u)\,\mathrm{d}u = \frac{M_2}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2$.

   La difficulté maintenant va être d'utiliser ce résultat pour améliorer la majoration, mais rentrer les valeurs absolues dans la somme. En effet, pour gérer le terme en f' en conservant un terme en $\dfrac{1}{n^2}$, on ne peut pas se contenter de majorer $\left|f'\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|$ par M_1.

   L'idée très astucieuse qui va utiliser la 1-périodicité est d'appliquer la première question à f' :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f'\right| \leqslant \frac{M_2}{2n}.$$

On a alors,

$$\left|S_n-\int_0^1 f\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)\right)\mathrm{d}t\right| = \left|-\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(t-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}R_{k,n}(t)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2n^2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{M_2}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{M_2}{4n^2}+\frac{M_2}{6n^2}=\boxed{\frac{5M_2}{12n^2}}$$

3. On applique de nouveau l'idée de la question précédente : formule de Taylor avec reste intégral et utilisation des questions précédentes. Avec f de classe $\mathscr{C}^3$,

$$\forall\, t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right],\quad f(t)=f\left(\frac{k}{n}\right)+f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(t-\frac{k}{n}\right)+f''\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\left(t-\frac{k}{n}\right)^2}{2}+R'_{k,n}(t)$$

avec $R'_{k,n}(t)=\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{t}\frac{(t-u)^2}{2}f'''(u)\,\mathrm{d}u$.

La 1-périodicité de f et de f' et les deux questions précédentes donnent

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\int_0^1 f'\right|\leqslant\frac{5M_3}{12n^2}$$
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''\left(\frac{k}{n}\right)-\int_0^1 f''\right|\leqslant\frac{M_3}{2n}$$

où on a noté $M_3=\max\limits_{[0,1]}|f'''|$

On a alors,

$$\left|S_n-\int_0^1 f\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)\right)\mathrm{d}t\right| = \left|-\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(t-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f''\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}R'_{k,n}(t)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2n^2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|+\frac{1}{6n^3}\left|\sum_{k=0}^{n-1}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{\frac{k}{n}}^{t}(t-u)^2M_3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\frac{5M_3}{24n^3}+\frac{M_3}{12n^3}+\frac{M_3}{24n^3}=\boxed{\frac{M_3}{3n^3}}$$

4. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodique, on en déduit par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N},\ S_n=\int_0^1 f+\underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^k}\right).}$$

2 Mines-Ponts 2024

Soit (u_n) une suite de réels non nuls et $\lambda\in\mathbb{R}$. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\lambda}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Étudier la nature de $\sum u_n$.

Solution de 2 : Mines-Ponts 2024

Raabe Duhamel : poser $v_n=\ln\left(n^\lambda|u_n|\right)$ et vérifier que la suite (v_n) converge en passant par la série télescopique.

On trouve $u_n\sim\dfrac{\mathrm{e}^K}{n^\lambda}$ ce qui permet de conclure.

3 Mines-Ponts 2024

1. Soit $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que pour tout $n\geqslant 1$,

$$\left|f(n)-\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{2}\max_{t\in[n,n+1]}|f'(t)|.$$

2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$?

Solution de 3 : Mines-Ponts 2024

1. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre n et $n+1$ à la fonction $F : x \mapsto \int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On en déduit que $\frac{\sin(\ln n)}{n} = -\cos(\ln(n+1)) + \cos(\ln(n)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$: la série diverge car $(\cos(\ln n))_n$ diverge (raisonner par l'absurde et faire de la trigonométrie, par exemple en considérant $\cos(\ln(2n))$)...)

4 Mines-Ponts 2023

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.
2. Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Solution de 4 : Mines-Ponts 2023

1. On pressent que $u_n \to +\infty$. On va donc essayer de minorer u_n en utilisant l'inégalité de convexité $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$ valable pour $x \in \mathbb{R}$. Or, pour $n \geqslant 1$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \mathrm{e}^{k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1+k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = H_n + n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
2. La minoration précédente laisse présager l'éventualité que $u_n \sim H_n \sim \ln n$. Considérons
$$0 \leqslant H_n - u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\int_0^{\frac{1}{n}} k(1-x)^{k-1}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{1}{n}} 1\,\mathrm{d}x = 1.$$
On en déduit que $H_n - u_n = \mathrm{o}(H_n)$ donc $\boxed{u_n \sim H_n \sim \ln n.}$

2. Suites et séries de fonctions

5 Mines-Ponts MPI 2025 (Alexis) avec préparation

On considère la suite définie par $b_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \leqslant \frac{1}{\ln^n 2}$.
2. Montrer que $R = \mathrm{R}\left(\sum b_n x^n\right) > 0$.

   Puis montrer que $\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{1}{2-\mathrm{e}^x}$.

   En déduire R.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$.

Solution de 5 : Mines-Ponts MPI 2025 (Alexis) avec préparation

1. Récurrence forte.
2.
   - On en déduit que $R \geqslant \ln 2 > 0$.
   - On fait apparaître un produit de Cauchy en faisant attention au fait que la formule de récurrence est valable pour $n \geqslant 1$ et en faisant bien apparaître le terme pour $k = 0$ dans le produit de Cauchy.
   - On déduit de l'expression trouvée que $R = \ln 2$.

3. L'idée naturelle est de développer en série entière $\frac{1}{2-e^x}$ à l'aide d'une série géométrique puis en développant l'exponentielle et en utilisant le théorème de Fubini.
   Une autre idée est de montrer que l'expression donnée vérifie la même récurrence et la même initialisation que (b_n).

6 Mines-Ponts 2024

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Solution de 6 : Mines-Ponts 2024

1. Pas de difficulté.
2. Première solution : montrer que $\frac{f(2^{-p})}{2^{-p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$.
   Comme $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$, elle y admet une borne inférieure notée α.
   Alors $\frac{f(2^{-p})}{2^{-p}} = \sum_{n=0}^{p} \frac{\sin(2^{n-p})}{2^{n-p}} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{\sin(2^{n-p})}{2^{n-p}} \geqslant (p+1)\alpha - \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-p}} = (p+1)\alpha - 1 \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$.
   Deuxième solution : remarquer que $\frac{f(2x)}{2} = f(x) - \sin x$ et en déduire que s'il y a dérivabilité en 0, $f'(0) = f'(0) - 1$.

---

7 Mines-Ponts On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

1. Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de S.
2. Donner un équivalent de S en 0 et en 1^-.

Solution de 7 : Mines-Ponts

1.
   - Pour $x = -1$ et n impair, la série n'a pas de sens.
   - Pour les autres cas où $|x| \geqslant 1$, la série est grossièrement divergente.
   - Pour $|x| < 1$,
   $$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$
   et la série est absolument convergente.

   $\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie sur }]-1,1[.}$

   Posons $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^n} = 1-(1+x^n)^{-1}$. Appliquons le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des séries de fonctions.

   H1 Les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$, $u_n' : x \mapsto \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$.

   H2 $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ comme on vient de le voir.

   H3 Pour tout $a \in [0,1[$, $\left\|u_n'\right\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \sim na^{n-1}$, la série entière $\sum nx^n$ étant de même rayon de convergence que $\sum x^n$, soit 1, ce qui assure la convergence normale donc uniforme de $\sum u_n'$ sur tout segment de $]-1,1[$.

   Par théorème, $\boxed{\text{la fonction } S \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-1,1[.}$

2. On a déjà $\boxed{S(x) \underset{x\to 0}{\sim} S(0) = \frac{1}{2}.}$

   Enfin, une comparaison série intégrale obtenue par décroissance de $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto 1 - \frac{1}{1+e^{t\ln x}}$ à $x \in [0,1[$ fixé donne

   $\boxed{S(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(2)}{1-x}.}$

8 X–ENS

1. Quelle est la limite simple de (f_n) où $f_n : z \in \mathbb{C} \mapsto \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que
$$1-\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{n}$$
3. En déduire que (f_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Solution de 8 : X–ENS
FGN 5 2.35

1. Théorème de la double limite appliqué à $g_k : x \mapsto \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)z^k}{k!x^k}\mathbb{1}_{[k,+\infty[}(x)$: convergence simple vers $\exp$.
2. Récurrence sur k.
3. Séparer dans $\left|f_n(z)-\exp z\right|$ les termes d'indices $\leqslant n$ et $> n$ et utiliser la question précédente.

3. Probabilités

9 X 2025 (Samuel) On étudie l'existence de $C>0$ tel que $\forall X, Y$ vaiid réelles,

$$\mathbb{P}\big(|X-Y| \leqslant 2\big) \leqslant C\,\mathbb{P}\big(|X-Y| \leqslant 1\big)$$

1. Montrer l'existence de $C'>0$ tel que $\forall X, Y$ vaiid dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}\big(|X-Y| \leqslant 2\big) \leqslant C'\,\mathbb{P}(X=Y)$.
2. En déduire le résultat souhaité.
3. Montrer que $C' \geqslant 3$.

Solution de 9 : X 2025 (Samuel)

1. Notons $p_k = \mathbb{P}(X=k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
On a alors $\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k^2$ par indépendance.
D'autre part,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-Y| \leqslant 2) &= \mathbb{P}(Y-2 \leqslant X \leqslant Y+2)\\ &= \mathbb{P}(X=Y-2)+\mathbb{P}(X=Y-1)+\mathbb{P}(X=Y)+\mathbb{P}(X=Y+1)+\mathbb{P}(X=Y+2)\\ &= \mathbb{P}(X=Y)+2\mathbb{P}(X=Y+1)+2\mathbb{P}(X=Y+2)\end{aligned}$$
par symétrie, avec, par indépendance,
$$2\mathbb{P}(X=Y+1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2p_kp_{k+1} \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(p_k^2+p_{k+1}^2\right) = 2\mathbb{P}(X=Y)$$
et
$$2\mathbb{P}(X=Y+2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2p_kp_{k+2} \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(p_k^2+p_{k+2}^2\right) = 2\mathbb{P}(X=Y)$$
Donc $C'=5$ convient.
2. Si X et Y sont des vaiid réelles, alors $\lfloor X\rfloor$ et $\lfloor Y\rfloor$ sont des vaiid entières.
Or
$$\lfloor X\rfloor = \lfloor Y\rfloor \implies |X-Y| \leqslant 1$$
donc $\mathbb{P}(\lfloor X\rfloor = \lfloor Y\rfloor) \leqslant \mathbb{P}(|X-Y| \leqslant 1)$.
Puis, par croissance de la partie entière,
$$|X-Y| \leqslant 2 \implies Y-2 \leqslant X \leqslant Y+2 \implies \lfloor Y\rfloor-2 \leqslant \lfloor X\rfloor \leqslant \lfloor Y\rfloor+2 \implies \big|\lfloor X\rfloor-\lfloor Y\rfloor\big| \leqslant 2$$
donc $\mathbb{P}(|X-Y| \leqslant 2) \leqslant \mathbb{P}(\big|\lfloor X\rfloor-\lfloor Y\rfloor\big| \leqslant 2)$.
Ainsi, la question précédente répond au problème initial avec $C=5$.

3. L'idée est de construire des variables aléatoires telles que $\dfrac{\mathbb{P}(|X-Y|\leqslant 2)}{\mathbb{P}(X=Y)}$ tende vers 3...

   Choisissons des variables aléatoires suivant une loi uniforme.
   Pour simplifier le numérateur, on peut supposer que les valeurs prises sont paires : $0,2,\dots,2n$.
   On calcule alors $\dfrac{\mathbb{P}(|X-Y|\leqslant 2)}{\mathbb{P}(X=Y)}=\dfrac{3n+1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}3$ ce qui permet de conclure.
   Le même exemple donne aussi $C\geqslant 3$.

10 **Mines-Ponts MPI 2025 avec préparation** Dans $\mathfrak{S}_n$, on considère l'événement E_i : « $\sigma(i)=i$ ».

1. Calcule $\mathbb{P}(E_i)$.
2. On pose $X_i=\mathbb{1}_{E_i}$ et $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$ la variable aléatoire du nombre de points fixes.
   (a) Calculer l'espérance de S.
   (b) Calculer la covariance de X_i et de X_j pour $i\neq j$.
   (c) Calculer la variance de S.

11 **Mines-Ponts 2022 (Théo) sans préparation** On choisit au hasard $A,B\in\mathscr{P}(⟦1,n⟧)$. Déterminer

$$\mathbb{P}(A\subset B\text{ ou }B\subset A).$$

Solution de 11 : Mines-Ponts 2022 (Théo) sans préparation

$\mathbb{P}(A\subset B\text{ ou }B\subset A)=2\mathbb{P}(A\subset B)-\mathbb{P}(A=B)$, avec $\mathbb{P}(A=B)=\dfrac{1}{2^n}$ et

$$\mathbb{P}(A\subset B)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\big(B\in\mathscr{P}_k(⟦1,n⟧)\big)\mathbb{P}\big(A\in\mathscr{P}(B)\big|B\in\mathscr{P}_k(⟦1,n⟧)\big)=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

On peut aussi remarquer que pour chaque entier entre 1 et n, il y a exactement 3 possibilités : il est soit dans A, soit dans $B\setminus A$, soit hors de B, ce qui donne 3^n possibilités pour un couple (A,B) tel que $A\subset B$.

12 **Mines-Ponts 2023** On tire au hasard un élément A de $\mathscr{P}(⟦1,n⟧)$. Calculer la probabilité que $|A|$ soit un entier pair.

Solution de 12 : Mines-Ponts 2023

La réponse est 1 si $n=0$, $\dfrac{1}{2}$ sinon : il suffit d'exhiber une bijection entre l'ensemble des parties de cardinal pair et celui des parties de cardinal impair

$$A\mapsto\begin{cases}A\cup\{1\} & \text{si } 1\notin A\\ A\setminus\{1\} & \text{si } 1\in A\end{cases}$$

13 **Mines-Ponts 2023 (posé aussi à CCINP...)** Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $U=\big(X_1\dots\dots X_n\big)$ et $M=U^{\intercal}U$.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires $\operatorname{tr}M$ et $\operatorname{rg}M$.
2. Calculer la probabilité que M soit une matrice de projection.

14 **ENS MP L 2024** Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soient $v_1,\dots,v_n\in E$ tels que, pour tout $i\in⟦1,n⟧$, $\|v_i\|\leqslant 1$.

Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[-1,1]$ et $w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}$ tels que $v=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i v_i$ satisfait $\|v-w\|\leqslant\sqrt{n}$.

Indication : non, non, cet exercice est bien au bon endroit.

Solution de 14 : ENS MP L 2024

On pose $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ avec $\mathbb{P}(X_i=1)=\dfrac{\alpha_i+1}{2}$, et $V=\sum_{i=1}^{n}X_i v_i$.

On calcule $\mathbb{E}\big(\|V-w\|^2\big)=\sum_{i=1}^{n}\big(1-\alpha_i^2\big)\|v_i\|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\big(1-\alpha_i^2\big)\leqslant n$.

La variable aléatoire $\|V-w\|^2$ ne peut prendre uniquement des valeurs $>n$, sans quoi son espérance serait $>n$. D'où le résultat.

15 X 2024

Une grille $\{1,2,3\} \times [\![1,n]\!]$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t=0$ une goutte d'eau au point $(2,n)$.

À chaque instant, si elle se trouve au milieu (ie en un point $(2,k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se déplace à droite (respectivement à gauche) avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à l'instant t.
2. Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

Solution de 15 : X 2024

1. On remarque que dans tous les cas, la goutte descend avec probabilité $\frac{1}{2}$.

   Soit D_i la variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ permettant de savoir si, à l'étape i, la goutte est descendue.

   Alors l'ordonnée de la goutte à l'instant t est $X = n - \sum_{i=1}^{t} D_i$.

   L'événement A_t « La goutte sort à l'instant $t \geqslant n$ » est donc l'événement

   $$A_t = \left(\sum_{i=1}^{t} D_i = n, \sum_{i=1}^{t-1} D_i = n-1\right) = \left(D_t = 1, \sum_{i=1}^{t-1} D_i = n-1\right).$$

   Comme les D_i sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, $\sum_{i=1}^{t-1} D_i \sim \mathscr{B}\left(t-1, \frac{1}{2}\right)$.

   Avec l'indépendance des D_i et le lemme des coalitions, on obtient

   $$\mathbb{P}(A_t) = \mathbb{P}(D_t = 1)\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{t-1} D_i = n-1\right) = \frac{1}{2} \times \binom{n-1}{t-1}\frac{1}{2^{t-1}} = \boxed{\binom{n-1}{t-1}\frac{1}{2^t}}$$

   (qui est nul si $t < n$, donc l'expression reste valable dans tous les cas.)

2. Notons $Y = \min\left\{t \geqslant n, \text{ tel que} \sum_{i=1}^{t} D_i = n\right\}$ la variable aléatoire du temps d'attente de la sortie de la goutte dont on veut calculer l'espérance. Sa fonction génératrice est

   $$G_Y(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=n}^{+\infty}(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^k.$$

   En dérivant $n-1$ fois la série géométrique (de rayon de convergence 1), on obtient

   $$\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \sum_{k=n-1}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+2)x^{k-n+1} = \sum_{k=n}^{+\infty}(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$$

   D'où on tire

   $$G_Y(x) = \left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)^n = \left(\frac{x}{2-x}\right)^n = \left(\frac{2}{2-x} - 1\right)^n$$

   dérivable en 1, donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = G_Y'(1) = 2n.}$

16 ENS PLSR 2024

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.
Si N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $X_{N+n}(\omega) = X_{N(\omega)+n}(\omega)$.

1. Existe-t-il N tel que $\mathbb{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_{N+n} = 1) = \frac{1}{2}$?
2. Existe-t-il N tel que $\mathbb{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\mathbb{P}(X_{N+n} = 1) = \frac{1}{2}$?

Solution de 16 : ENS PLSR 2024

Source : RMS

1. Un temps d'arrêt géométrique convient : on pose $N=\min\{k\geqslant 1, X_k=1\}$, en décidant que $N=0$ dans le cas (de probabilité nulle) où l'ensemble est vide. Alors, pour tout k et $n>0$, l'événement

$$\{X_{k+n}=1\} \text{ est indépendant de } \{N=k\}=\{X_1=\dots=X_{k-1}=-1, X_k=1\}$$

Et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{N+n}=1)&=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X_{k+n}=1,\ N=k)\\&=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X_{k+n}=1)\mathbb{P}(N=k)=\frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(N=k)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. La réponse est positive. Notons (M_n) la marche aléatoire telle que $M_0=X_0$ et $M_n=X_n+M_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.
Soit $T=\min\{n\in\mathbb{N}^*,\ M_n=0\}$.
Il est classique que $T<\infty$ presque sûrement.
Sur l'intervalle $[\![1;T-1]\!]$, M_n reste strictement d'un côté de l'origine. Soit $Y_n=X_{T-n}$.
Montrons que c'est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme.
Pour tout $t\in\mathbb{N}^*$, notons E_t l'ensemble des $(\alpha_0,\dots,\alpha_t)\in\{-1,1\}^{t+1}$ tels que

$$t=\min\{s\geqslant 1,\ \alpha_0+\dots+\alpha_s=0\}$$

Pour tout $I\subset\mathbb{Z}$ fini, notons $I_t=I\cap[\![0;t]\!]$ et $I'_t=I\backslash I_t$. Pour toute fonction $\varepsilon: I\to\{-1,1\}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i=\varepsilon_i)\right)=\sum_{t\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{2^{|I'_t|}}2^{-(t+1)}\left|\left\{(\alpha_0,\dots,\alpha_t)\in E_t,\ \forall i\in I_t,\ \alpha_i=\varepsilon_i\right\}\right|$$

Comme $(\alpha_0,\dots,\alpha_t)\mapsto(\alpha_t,\dots,\alpha_0)$ est une bijection de E_t sur lui-même, on en déduit que

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i=\varepsilon_i)\right)=\sum_{t\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{2^{|I'_t|}}2^{-(t+1)}\left|\left\{(\alpha_0,\dots,\alpha_t)\in E_t,\ \forall i\in\sigma_t(I_t)\ \alpha_i=\varepsilon_{t-i}\right\}\right|$$

où σ_t est la fonction $i\mapsto t-i$. Le membre de droite est égal à $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(Y_i=\varepsilon_i)\right)$, par conséquent on a bien

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(Y_i=\varepsilon_i)\right)=2^{-|I|}$$

Posons maintenant $N=T$ si $X_0=-1$ (ce qui est équivalent à $Y_0=1$) et $N=0$ si $X_0=1$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, on a $X_{N+n}=X_n$ si $X_0=1$ et $X_{N+n}=Y_{-n}$ si $Y_0=1$. On a

$$\mathbb{P}(X_{N+n}=1)=\mathbb{P}(X_0=1,X_n=1)+\mathbb{P}(Y_0=1,Y_{-n}=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

car X_0 et X_n (resp. Y_0 et Y_{-n}) sont indépendantes.

4. Algèbre bilinéaire

17 Mines-Ponts MPI 2025 (Samuel) sans préparation

Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,y_1),\dots,(x_p,y_p)\in\mathbb{R}^2$.

Déterminer une droite cartésienne $D: y=ax+b$ telle que la somme $S(a,b)=\sum_{i=1}^{p}(y_i-ax_i-b)^2$ soit minimale.

Solution de 17 : Mines-Ponts MPI 2025 (Samuel) sans préparation

- ★ Je fais un dessin. *On est dans quel chapitre ?*
- ★ Optimisation, donc je vais calculer le gradient, puis...
- ★ Mise en équation et discussion sur le déterminant associé au système. *Fin de l'épreuve.*

18 Centrale Maths 1 MPI 2025 (Samuel)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. (a) Que signifie $A\in\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$? Montrer que cela équivaut à $\operatorname{Sp}A\subset\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Soit E un espace euclidien et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Montrer que $A\in\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe φ un produit scalaire tel que $A=\left(\varphi(e_i,e_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

2. Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure dont les valeurs propres sont strictement positives telle que

$$A = T^\intercal T$$

puis montrer l'unicité.

3. En déduire l'inégalité de Hadamard : si $C_1, \ldots, C_n$ désignent les colonnes de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\det(M)| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|_2$$

avec égalité si et seulement si la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est orthogonale.

Solution de 18 : Centrale Maths 1 MPI 2025 (Samuel)

Idées de Samuel – *Propositions de l'examinateur*

1.a ok

1.b $(\Longleftarrow)$ Calcul de $\langle X, AY\rangle$. [...] $\langle X, AY\rangle = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$ *« C'est la bonne expression »*

Comme φ est bien un produit scalaire, ok.

$(\Longrightarrow)$ Je n'ai pas utilisé la **1.a** donc peut-être que je vais en avoir besoin...

« Non, on va imaginer le produit scalaire puis on vérifiera que c'en est un. »

si $x, y \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, X, Y les vecteurs colonnes associés.

$\varphi(x, y) = X^\intercal AY$ définit bien un produit scalaire car $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Pas d'idée, racine carrée ? *« Racine carrée ? »*

Je déroule pour avoir $A = R^\intercal R$ mais $R \in \mathscr{T}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Fin de l'épreuve à ce stade.

19 Centrale

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique défini positif de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. On pose

$$\langle x, y\rangle_u = \left\langle u^{-1}(x), y\right\rangle \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle_u$ est un produit scalaire.

Soit v un endomorphisme autoadjoint de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

2. Montrer que $u \circ v$ est diagonalisable.

Si w est un endomorphisme diagonalisable de E, on note $\lambda_{\min}(w)$ (resp. $\lambda_{\max}(w)$) sa plus petite (resp. grande) valeur propre.

3. Montrer que l'image de $E \backslash \{0\}$ par

$$x \longmapsto \frac{\langle v(x), x\rangle}{\langle u^{-1}(x), x\rangle}$$

n'est autre que le segment d'extrémités $\lambda_{\min}(u \circ v)$ et $\lambda_{\max}(u \circ v)$.

4. Montrer que

$$\lambda_{\min}(u)\lambda_{\min}(v) \leqslant \lambda_{\min}(u \circ v) \leqslant \lambda_{\max}(u \circ v) \leqslant \lambda_{\max}(u)\lambda_{\max}(v)$$

Solution de 19 : Centrale

Source : dDmaths

1. $u \in \mathscr{S}_n^{+*}(E)$ donc $u^{-1} \in \mathscr{S}_n^{+*}(E)$ et par suite $\langle\cdot,\cdot\rangle_u$ est un produit scalaire sur E.
2. On a

$$\langle x, u(v(y))\rangle_u = \left\langle u^{-1}x, u(v(y))\right\rangle = \langle x, v(y)\rangle = \langle v(x), y\rangle = \langle u(v(x)), y\rangle_u$$

L'endomorphisme $u \circ v$ est autoadjoint dans $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_u)$ donc diagonalisable.

3. On a

$$\frac{\langle v(x), x\rangle}{\langle u^{-1}(x), x\rangle} = \frac{\langle u(v(x)), x\rangle_u}{\|x\|_u^2}$$

En introduisant une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_u)$ formée de vecteurs propres de $u \circ v$, on peut écrire pour $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$,

$$\frac{\langle u \circ v(x), x\rangle_u}{\|x\|_u^2} = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

en notant $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de $u\circ v$. Il est clair que cette quantité est comprise entre $\lambda_{\text{min}}(u\circ v)$ et $\lambda_{\text{max}}(u\circ v)$. De plus, ces deux valeurs propres sont valeurs prise par

$$\frac{\langle u\circ v(x),x\rangle_u}{\|x\|_u^2}$$

en x vecteur propre associé. Enfin, $E\backslash\{0_E\}$ est connexe par arcs et l'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs. On peut donc conclure que les valeurs prises par

$$x\mapsto\frac{\langle v(x),x\rangle}{\langle u^{-1}(x),x\rangle}$$

sur $E\backslash\{0\}$ constituent le segment

$$[\lambda_{\min}(u\circ v);\lambda_{\max}(u\circ v)]$$

4. On a $\langle v(x),x\rangle\leqslant\lambda_{\text{max}}(v)\|x\|^2$ et $\left\langle u^{-1}(x),x\right\rangle\geqslant\lambda_{\text{min}}\left(u^{-1}\right)\|x\|^2$ donc

$$\frac{\langle v(x),x\rangle}{\langle u^{-1}(x),x\rangle}\leqslant\frac{\lambda_{\max}(v)}{\lambda_{\min}(u^{-1})}$$

Or

$$\lambda_{\min}\left(u^{-1}\right)=\frac{1}{\lambda_{\max}(u)}$$

donc

$$\frac{\langle v(x),x\rangle}{\langle u^{-1}(x),x\rangle}\leqslant\lambda_{\max}(u)\lambda_{\max}(v)$$

et la conclusion est dès lors facile.

20 Mines-Ponts

Soient $A\in\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence de $C\in\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C^2=A^{-1}$.
2. On pose $D=CBC$. Montrer que
$$(\det(\mathrm{I}_n+D))^{1/n}\geqslant 1+(\det(D))^{1/n}$$
3. Montrer que
$$(\det(A+B))^{1/n}\geqslant(\det(A))^{1/n}+(\det(B))^{1/n}$$

Solution de 20 : Mines-Ponts

Source : dDmaths

1. Par le théorème spectral, la matrice symétrique réelle A est orthogonalement diagonalisable. De plus, étant définie positive, ses valeurs propres sont strictement positive. On peut donc écrire
$$A=P^\top DP \text{ avec } P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \text{ et } \lambda_i>0$$
La matrice $C=P^\top\Delta P$ avec $\Delta=\operatorname{diag}\left(1/\sqrt{\lambda_1},\dots,1/\sqrt{\lambda_n}\right)$ convient.
2. On vérifie $D^\top=D$ et $X^\top DX=(CX)^\top B(CX)\geqslant 0$ donc $D\in\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. On peut alors écrire
$$D=Q^\top D'Q \text{ avec } Q\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\quad D'=\operatorname{diag}\left(\mu_1,\dots,\mu_n\right)\quad\text{et}\quad\mu_i\geqslant 0$$
Par similitude, l'inégalité voulue revient à
$$\prod_{i=1}^n\left(1+\mu_i\right)^{1/n}\geqslant 1+\prod_{i=1}^n\mu_i^{1/n}$$
Si l'un des μ_i est nul, l'inégalité est entendue. Supposons désormais les μ_i tous non nuls. Pour l'obtenir l'inégalité, on introduit la fonction $x\mapsto\ln(1+\mathrm{e}^x)$. Celle-ci est convexe car de dérivée seconde positive. Par l'inégalité de Jensen
$$\forall a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R},\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i}\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln(1+\mathrm{e}^{a_i})$$
En choisissant $a_i=\ln\left(\mu_i\right)$, on obtient
$$\ln\left(1+\prod_{i=1}^n\mu_i^{1/n}\right)\leqslant\ln\left(\prod_{i=1}^n\left(1+\mu_i\right)^{1/n}\right)$$
puis l'inégalité voulue.

3. On a
$$(\det(C))^2\det(A+B)=\det(CAC+CBC)=\det(\mathrm{I}_n+D)$$
avec
$$\det(A)=1/(\det(C))^2 \text{ et } \det(B)=\det(D)/(\det(C))^2$$
La comparaison
$$(\det(\mathrm{I}_n+D))^{1/n}\geqslant 1+(\det(D))^{1/n}$$
fournit alors l'inégalité proposée.

21 ENS L 2024

Soit $p\geqslant 1$ et A,B dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$\operatorname{tr}\left(I_p-A^{-1}B\right)\leqslant \ln\left(\frac{\det A}{\det B}\right).$$
2. Soit $n\geqslant 1$, $u_1,\dots,u_n$ dans $\mathbb{R}^p$ et $\lambda>0$. Pour $1\leqslant m\leqslant n$, on pose $A_m=\sum_{k=1}^{m}u_k u_k^{\mathsf{T}}$ et $B_m=\lambda I_p+A_m$.
   Montrer que, pour $1\leqslant m\leqslant n$, B_m est symétrique définie positive.
3. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A_n. Montrer que
$$\sum_{m=1}^{n}\left\langle u_m,B_m^{-1}u_m\right\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{p}\ln\left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda}\right).$$

Solution de 21 : ENS L 2024

Source : RMS

1. L'inégalité provient du fait classique que $A^{-1}B$ est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Démontrons-le.
   Puisque A est symétrique la forme $\varphi:(X,Y)\in(\mathbb{R}^p)^2\mapsto X^TAY$ est bilinéaire symétrique, et puisque A est définie positive cette forme est définie positive. C'est donc un produit scalaire.
   Or $u:X\in\mathbb{R}^p\mapsto A^{-1}BX$ est autoadjoint pour ce produit scalaire car la forme bilinéaire
$$(X,Y)\mapsto\varphi(X,u(Y))=X^TA\left(A^{-1}B\right)Y=X^TBY$$
   est symétrique (B étant symétrique). Enfin $\forall X\in\mathbb{R}^p\backslash\{0\},\varphi(X,u(X))=X^TBX>0$ puisque B est définie positive. Ainsi le théorème spectral montre ainsi que u est diagonalisable à valeurs propres dans $\mathbb{R}_+^*$. C'est le résultat voulu.
   Notons ensuite $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de $A^{-1}B$. Comme cette matrice est diagonalisable, d'une part $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k=\operatorname{tr}\left(A^{-1}B\right)$, d'autre part
$$\prod_{k=1}^{p}\lambda_k=\det\left(A^{-1}B\right)=\frac{\det B}{\det A},\quad\text{donc}\quad\ln\left(\frac{\det B}{\det A}\right)=\sum_{k=1}^{p}\ln(\lambda_k)$$
   Par concavité de $\ln$, il vient
$$\ln\left(\frac{\det A}{\det B}\right)=-\sum_{k=1}^{p}\ln(\lambda_k)\geqslant\sum_{k=1}^{p}(1-\lambda_k)=p-\operatorname{tr}\left(A^{-1}B\right)=\operatorname{tr}\left(I_p-A^{-1}B\right)$$
2. Soit $m\in[\![1,n]\!]$. Alors par linéarité de la transposition
$$A_m^{\mathsf{T}}=\sum_{k=1}^{m}\left(u_ku_k^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}=\sum_{k=1}^{m}u_ku_k^{\mathsf{T}}=A_m$$
   Ainsi $B_m^T=\lambda I_p+A_m^{\mathsf{T}}=\lambda I_p+A_m=B_m$, donc B_m est symétrique. Ensuite
$$\forall X\in\mathbb{R}^p\backslash\{0\},X^{\mathsf{T}}B_mX=\lambda\|X\|^2+\sum_{k=1}^{m}X^{\mathsf{T}}u_ku_k^{\mathsf{T}}X=\underbrace{\lambda\|X\|^2}_{>0}+\sum_{k=1}^{m}\underbrace{\langle u_k,X\rangle^2}_{\geqslant 0}>0$$
   Ainsi $B_m\in\mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.
3. On pose $A_0:=0$ et $B_0:=\lambda I_p+B_0=\lambda I_p$. Soit $m\in[\![1,n]\!]$. On note que
$$\begin{aligned}\left\langle u_m,B_m^{-1}u_m\right\rangle&=u_m^{\mathsf{T}}B_m^{-1}u_m=\operatorname{tr}\left(u_m^{\mathsf{T}}B_m^{-1}u_m\right)=\operatorname{tr}\left(B_m^{-1}u_mu_m^{\mathsf{T}}\right)\\&=\operatorname{tr}\left(B_m^{-1}(A_m-A_{m-1})\right)\end{aligned}$$
   En outre, $A_m-A_{m-1}=\left(B_m-\lambda I_p\right)-\left(B_{m-1}-\lambda I_p\right)=B_m-B_{m-1}$, donc le calcul précédent donne
$$\left\langle u_m,B_m^{-1}u_m\right\rangle=\operatorname{tr}\left(B_m^{-1}(B_m-B_{m-1})\right)=\operatorname{tr}\left(I_p-B_m^{-1}B_{m-1}\right)$$

4. Vu le résultat de la question ***b***) (qui s'applique évidemment aussi à $B_0 = \lambda I_p$), on déduit du résultat de a) que $\operatorname{tr}\left(I_p - B_m^{-1}B_{m-1}\right) \leqslant \ln(\det B_m) - \ln(\det B_{m-1})$. Ainsi, par sommation télescopique,

$$\sum_{m=1}^{n}\left\langle u_m, B_m^{-1}u_m\right\rangle \leqslant \sum_{m=1}^{n}(\ln(\det B_m) - \ln(\det B_{m-1})) = \ln(\det B_n) - \ln(\det B_0)$$

Enfin, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ telle que $A_n = P\,\mathrm{Diag}\left(\lambda_1, \dots, \lambda_p\right)P^{-1}$, puis $B_n = P\,\mathrm{Diag}\left(\lambda+\lambda_1, \dots, \lambda+\lambda_p\right)P^{-1}$ et ainsi $\det(B_n) = \prod_{k=1}^{p}(\lambda+\lambda_k)$. Finalement

$$\sum_{m=1}^{n}\left\langle u_m, B_m^{-1}u_m\right\rangle \leqslant \sum_{k=1}^{p}\ln(\lambda+\lambda_k) - \ln(\lambda^p) = \sum_{k=1}^{p}\ln\left(1+\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)$$

5. Espaces vectoriels normés

22 **Mines-Ponts MPI 2025 sans préparation** On définit, sur $\mathbb{R}[X]$,

$$N(P) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_0^1 P(t)t^n\,\mathrm{d}t\right| \qquad \|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}|P(t)| \qquad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes ?
3. Les normes N et $\|\cdot\|_1$ sont elles équivalentes ?

Solution de 22 : Mines-Ponts MPI 2025 sans préparation

1.
2. Non : considérer $P_n = X^n$.
3. Non, considérer $f_k : t \mapsto \cos(2k\pi t)$ et utiliser le théorème de Weierstraß.
   On calcule $\left\|f_k\right\|_1 = \dfrac{2}{\pi}$ et, par IPP, $N(f_k) \leqslant \dfrac{1}{2k\pi} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
   Cela prouve la non équivalence de N et $\|\cdot\|_1$ sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$.
   Par théorème de Weierstraß, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a un polynôme P_k tel que $\left\|P_k - f_k\right\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{k}$ car f_k est continue sur le segment $[0,1]$.
   Alors $\|P_k\|_1 \geqslant \left\|f_k\right\|_1 - \left\|P_k - f_k\right\|_1 \geqslant \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{1}{k}$ donc $\|P_k\|_1 \not\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $N(P_k) \leqslant N(P_k - f_k) + N(f_k) \leqslant \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k\pi}$ donc $N(P_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, ce qui permet de conclure que les normes ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$ non plus.

23 **Mines-Ponts 2024** Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| \text{ et } N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Comparer les normes N et $\|\cdot\|_\infty$.

Solution de 23 : Mines-Ponts 2024

1. Norme associée au produit scalaire $\left\langle f, g\right\rangle = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\|\cdot\|_\infty \leqslant 2N$ avec $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ et Cauchy-Schwarz.
   Par contre, N n'est pas dominée par $\|\cdot\|_\infty$ avec $f : x \mapsto \sin(n\pi x)$.

24 **Mines-Ponts 2022 (Greg)** Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Montrer que $N : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sup_{x\in[a,b]} |P(x)|$ est une norme.
2. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $(F_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ et deux normes telles que F_n converge vers P pour l'une et Q pour l'autre.

Solution de 24 : Mines-Ponts 2022 (Greg)

1. Classique
2. On pose

$$f : [0,3] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} P(x) & \text{si } x \leqslant 1 \\ P(1)+(x-1)(Q(2)-Q(1)) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ Q(x) & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$$

f est continue sur $[0,1]$ et $[2,3]$ et par continuité de P et Q, f est continue en 1 et en 2.

f est donc continue sur le segment $[0,3]$ et par théorème de Weierstrass, on a (F_n) tel que $F_n \overset{\text{CU}}{\to} f$ sur $[0,3]$.
Donc

$$\forall x \in [0,1],\ |F_n(x) - f(x)| \leqslant \|F_n - f\|_\infty \to 0$$

et $F_n \overset{N_1}{\to} P$ avec

$$N_1 : P \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$

De même pour Q sur $[2,3]$.

25 Mines-Ponts 2024

Soit f une forme linéaire continue non nulle sur un espace normé E. Soit x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que $|||f||| = \dfrac{|f(x_0)|}{\mathrm{d}(x_0, \mathrm{Ker}\, f)}$
2. Montrer que $\exists a \in E \setminus \{0\},\ |||f||| = \dfrac{|f(a)|}{\|a\|} \iff \exists b \in \mathrm{Ker}\, f,\ \|x_0 - b\| = \mathrm{d}(x_0, \mathrm{Ker}\, f)$

Solution de 25 : Mines-Ponts 2024

1. $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathbb{K}x_0$, donc, si $x \neq 0_E$, $x = x_K + \lambda x_0$ et, si $\lambda \neq 0$, $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|} = \dfrac{|f(x_0)|}{\left\|x_0 + \frac{1}{\lambda}x_K\right\|}$ ce qui permet de conclure facilement.
2. Pour le sens réciproque, si $\mathrm{d}(x_0, \mathrm{Ker}\, f) = \|x_0 - b\|$, alors $|||f||| = \dfrac{|f(x_0)|}{\|x_0 - b\|} = \dfrac{|f(x_0 - b)|}{\|x_0 - b\|}$ et il suffit de poser $a = (x_0 - b)$.

   Pour le sens direct, si $|||f||| = \dfrac{|f(a)|}{\|a\|}$, et $\mathrm{d}(x_0, \mathrm{Ker}\, f) = \dfrac{|f(x_0)|}{|||f|||} = \dfrac{|f(x_0)|}{f(a)}\|a\|$.
   Or $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Vect}\, x_0$ sont supplémentaires, donc on peut écrire $a = a_K + \lambda x_0$ avec $a_K \in \mathrm{Ker}\, f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, donc $f(a) = \lambda f(x_0)$.
   Donc $\mathrm{d}(x_0, \mathrm{Ker}\, f) = \left|\dfrac{1}{\lambda}\right| \|a_K + \lambda x_0\| = \|x_0 - b\|$ avec $b = -\dfrac{1}{\lambda} a_K \in \mathrm{Ker}\, f$.

---

26 Mines-Ponts 2024

1. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout couple (A, B) de matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ait $N(AB) = N(BA)$?

Solution de 26 : Mines-Ponts 2024

1. Classique
2. Si A est inversible, AB et BA sont semblables.
   On en déduit que $N\left(AB^2A\right) = N\left(BA^2B\right)$.
   Par densité et continuité de la norme, c'est encore vrai pour A quelconque.
   On obtient une contradiction avec $A^2 = 0_2$ et $AB^2A \neq 0_2$.
   Il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = I + A^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en dimension 2 et de compléter avec des 0 en dimension quelconque.

27 Mines-Ponts 2024

Déterminer les sous-groupes compacts de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Solution de 27 : Mines-Ponts 2024

Un tel sous groupe ne contient pas de z de module >1 car borné ni de z de module <1 car fermé et ne contient pas 0.
Il s'agit donc d'un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.
Or, l'exponentielle imaginaire pure est un morphisme continu

$$f : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathbb{U},\times) \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array} \right.$$

Donc, si K est un tel sous-groupe, $f^{-1}(K)$ est soit dense dans $(\mathbb{R},+)$, soit discret (à savoir redémontrer).

- Dans le premier cas, comme $f^{-1}(K)$ est fermé, on en déduit que $f^{-1}(K) = \mathbb{R}$, et donc que $\boxed{K = \mathbb{U}.}$
- Dans le deuxième cas, on a $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $f^{-1}(K) = a\mathbb{Z}$.
  Alors $K = \langle e^{ia} \rangle$. Ce groupe est fini si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $e^{ika} = 1$ si et seulement si $a \in 2\pi\mathbb{Q}$.
  - Dans ce cas, classiquement, $\boxed{K = \mathbb{U}_n}$ où $n = |K|$ car $\forall z \in K, \ \ z^n = 1$ et $|K| = |\mathbb{U}_n|$.
  - Supposons maintenant que $a \notin 2\pi\mathbb{Q}$. On a alors $f^{-1}(K) = a\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \neq a\mathbb{Z}$.
    En effet, sinon, on aurait un entier p, nécessairement différent de 1, tel que $a + 2\pi = ap$, donc

    $$a = \frac{2\pi}{p-1} \in 2\pi\mathbb{Q},$$

    ce qui est contradictoire.
    Ce cas ne se présente donc pas.

La synthèse était immédiate, $\boxed{\text{les sous-groupes compacts de } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ donc les } \mathbb{U}_n \text{ et } \mathbb{U}.}$

28 X 2024

1. Soit E un espace vectoriel normé. Que dire d'une partie A de E à la fois ouverte et fermée ?
2. Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$ soient toutes distinctes.

Solution de 28 : X 2024

1. On montre que $\mathbb{1}_A$ est continue car si $x \in A$ ouvert, au voisinage de x, $\mathbb{1}_A$ est nulle, et si $x \in \overline{A}$ ouvert, au voisinage de x, $\mathbb{1}_A$ est constante 1.
   Donc $\mathbb{1}_A(E)$ est connexe par arcs, donc $\mathbb{1}_A$ est constante sur E donc $\boxed{A \in \{\varnothing, E\}}$: E est connexe.
2. $\boxed{A =]0,1[\cup (\mathbb{Q} \cap]1,2[)}$ convient.

6. Algèbre linéaire, Réduction

29 Mines-Ponts MPI 2025 (Samuel) avec préparation

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur E.
Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(1) $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.

(2) L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array} \right.$ est surjective.

(3) Il existe $x_1, \dots, x_p$ dans E tels que $\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_p(x_1) & \cdots & f_p(x_p) \end{vmatrix} \neq 0.$

Solution de 29 : Mines-Ponts MPI 2025 (Samuel) avec préparation

- Je présente ce que j'ai fait. *Bien, essayons* $(3) \Longrightarrow (1)$.
- J'essaye directement... *Y a-t-il d'autres moyen de montrer une implication ?*
- Oui, par contraposée... $(3) \Longrightarrow (1)$: ok
- $(2) \Longrightarrow (1)$, *maintenant.* Euh,... $(2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1)$. *C'est vrai, mais regardons les autres implications quand même.*
- $(2) \Longrightarrow (1)$ par contraposée : ok
- $(1) \Longrightarrow (3)$ par contraposée. Petites valeurs de p ?
  - $p = 1$: ok
  - $p = 2$: $\dfrac{f_1}{f_2}$ constante donc f_1 et f_2 liées. *OK, passons au deuxième exercice.*

30 Mines-Ponts MPI 2025 (Alexis) sans préparation

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux dans leur ensemble.
   Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix}$ est inversible.
2. Soit $\alpha = \sqrt[3]{2}$ et $\mathscr{F} = (1, \alpha, \alpha^2)$. Montrer que $\mathscr{F}$ est $\mathbb{Q}$-libre.

Solution de 30 : Mines-Ponts MPI 2025 (Alexis) sans préparation

1. Je songeais au rang. *Caractérisation de la non inversibilité ?* $\rightarrow \det A = 0$.
   Je voulais calculer bien le déterminant mais *il a dit calcul direct (ie Sarrus WTF !!)*
   On obtient $a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc = 0$. *Que déduire de* a^3 *?* $a^3 \in 2\mathbb{Z}$ donc a aussi, de même pour b et c, contradiction.
2. Je songeais à un système $AX = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \end{smallmatrix}\right)$ avec $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{smallmatrix}\right)$.
   Comment se ramener aux hypothèses de la question 1 ? $\rightarrow$ Multiplier les fonctions par leurs quotients et diviser par $a \wedge b \wedge c$.
   N'oubliez pas que $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Je multiplie l'équation par α $\rightarrow 2^e$ *ligne de* AX *!!* $= 0$
   Puis 3e en multipliant $= 0$.
   Pas eu le temps de finir mais presque.

31 Centrale Maths 1 MPI 2025 (Alexis)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$.

1. Soit G un groupe fini. Que dire de l'ordre de ses éléments ? Le démontrer dans le cas commutatif.
2. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit l'application linéaire f_σ par $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
   (a) Montrer que $\sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto f_\sigma \in \mathrm{GL}(E)$ est un morphisme de groupes.
   (b) Étudier la diagonalisabilité de f_σ, déterminer son spectre et ses vecteurs propres.
3. On dit qu'un sous-espace de E est stable par permutation lorsque tous les f_σ le stabilisent. Déterminer les sous-espaces stables par permutation.

Solution de 31 : Centrale Maths 1 MPI 2025 (Alexis)

Idées d'Alexis – *Propositions de l'examinateur*

1. J'ai dit que pour $x \in G$ fini, $x^{|G|} = e_G$ donc l'ordre de x divise $|G|$.
Pour le démontrer, j'ai oublié légèrement.
« Considérez $P = \prod_{g \in G} g$. *»*
Soit $x \in G$. *« Que dire de* $g \mapsto xg$ *? »* Bijective. Alors

$$P = \prod_{g \in G} g = \prod_{g \in G} xg = x^{|G|} P$$

car G groupe commutatif. Or $P \in G$ donc P est inversible, donc $x^{|G|} = e_G$.

2.a On pose $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ \sigma & \longmapsto & f_\sigma \end{array} \right.$

Bonne définition Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrons que f_σ est inversible d'inverse $f_{\sigma^{-1}}$ (σ est bijective). En effet,

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ (f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}})(e_i) = f_\sigma\left(e_{\sigma^{-1}(i)}\right) = e_{\sigma(\sigma^{-1}(i))} = e_i = \mathrm{id}_E(e_i).$$

De même dans l'autre sens, et comme $f_\sigma, f_{\sigma^{-1}}$ sont linéaires, $f_\sigma \in \mathrm{GL}(E)$.

Morphisme $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ et $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ sont bien des groupes. Soient $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\varphi(\sigma \circ \sigma')(e_i) = f_{\sigma\circ\sigma'}(e_i) = e_{\sigma(\sigma'(i))} = f_\sigma(e_{\sigma'(i)}) = (f_\sigma \circ f_{\sigma'})(e_i).$$

Par linéarité, $f_{\sigma\circ\sigma'} = f_\sigma \circ f_{\sigma'}$.

3. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. *« Utiliser la question 1 ? »*
$|\mathfrak{S}_n| = n! < +\infty$.
Soit d l'ordre de σ. Alors $\sigma^d = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$.
Donc $\mathrm{id}_E = \varphi(\mathrm{id}) = \varphi(\sigma^d) = f_\sigma^d$.
Donc $f_\sigma^d = \mathrm{id}_E$. *« Diagonalisabilité de f_σ ? »*
Le polynôme $X^d - 1 = \prod_{k=0}^{d-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{d}}\right)$ est scindé à racines simples et annule f_σ.
Ainsi, f_σ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(f_\sigma) \subset \mathbb{U}_d$.
« Décomposez σ en cycles à supports disjoints. »
$\sigma = c_1 \cdots c_p$ avec $c_k = \left(a_{k,1}, \ldots, a_{k,p_k}\right)$.
« Chaque sous-espace $F_k = \mathrm{Vect}\left(e_{a_{k,1}}, \ldots, e_{a_{k,p_k}}\right)$ est stable par f_σ.
L'épreuve va se terminer.
Forme de la matrice diagonale ? »
Je ne sais pas (temps de réflexion trop court.)

32 Mines-Ponts MPI 2025 sans préparation

Soit $\mathbb{K}$ une $\mathbb{R}$ algèbre intègre associative de dimension finie et $a \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$.

1. Montrer que $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}\right.$ est un isomorphisme.
2. Si $a \notin \mathbb{R}$, montrer que $(1, a)$ est libre.
3. Montrer que a admet un unique polynôme annulateur non nul unitaire de degré minimal, puis qu'il est est irréductible et de degré 2.

33 Mines-Ponts 2022 (Théo) avec préparation

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Montrer que f est nilpotente.
2. On suppose $f^{n-1} \neq 0$.

   Montrer qu'il existe une base e de E telle que $\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

Solution de 33 : Mines-Ponts 2022 (Théo) avec préparation

1. On montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k = \frac{1}{k}\left(f^k \circ g - g \circ f^k\right)$ puis valeurs propres de $\varphi : u \mapsto u \circ g - g \circ u$.

34 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de dimension n et $\mathscr{F} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de formes linéaires.
Montrer que $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \ \exists\, x_0 \in E,\ \ \left(f_1(x_0), \ldots, f_p(x_0)\right) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p).$$

Solution de 34 : Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

L'application $u : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big) \end{array}\right.$ est représentée matriciellement par une matrice de format $p \times n$ dont les lignes représentent chacune des f_i.

Alors u est surjective. si et seulement si ces lignes sont libres si et seulement si $\operatorname{rg} u = p$ si et seulement si u est surjective.

35 Mines-Ponts 2024

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser ses éléments propres.
2. Déterminer les éléments propres de A.

Solution de 35 : Mines-Ponts 2024

1. Matrice circulante, cas particulier de matrice compagne ultra classique : $\chi_J = X^n - 1$. Si $\omega \in \mathbb{U}_n$, $E_\omega(J) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$.
2. $A = \dfrac{J + J^\intercal}{2}$ est (ortho-)diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car symétrique réelle.

   Mais pour la diagonaliser, il vaut mieux remarquer que $A = \dfrac{J + J^{n-1}}{2}$ car J et J^{n-1} commutent donc sont codiagonalisables.

   Les valeurs propres sont les $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2ik(n-1)\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-\frac{2ik\pi}{n}} = 2\cos\frac{2k\pi}{n}$ (qui est bien réel) pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, et les sous-espaces propres sont les mêmes que pour J.

36 Mines-Ponts 2017

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples.

1. Montrer que si $A = B^2$, alors B est diagonalisable.
2. Montrer que si $AB = BA$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Solution de 36 : Mines-Ponts 2017

1. $\chi_A\left(X^2\right)$ est un polynôme annulateur simplement scindé de B.
2. On a diagonalise $A = QDQ^{-1}$ et on pose $B' = Q^{-1}BQ$.
   Alors $DB' = B'D$ et comme les cœfficients de D sont deux à deux distincts, B' est diagonale.
   Or $B = P(A)$ si et seulement si $B' = P(D)$. On conclut par interpolation de Lagrange.

37 Centrale 2024 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.

1. Donner et démontrer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
   En déduire que $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} A$, $\dfrac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)} = \operatorname{tr}\left((xI_n - A)^{-1}\right)$.
2. Pour tous $j \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{C}$, on pose $B_j = \sum_{i=0}^{j} a_i A^{j-i}$ puis $Q(x) = \sum_{j=1}^{n} x^{n-j} B_{j-1}$.
   Montrer que $Q(x)(xI_n - A) = \chi_A(x) I_n$ et $\operatorname{tr} Q(x) = \chi_A'(x)$.
3. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $S_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k$. Montrer que $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\sum_{i=0}^{j} a_i S_{j-i} = (n-j) a_j$.

Solution de 37 : Centrale 2024

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.

1. Pas de difficulté en trigonalisant $xI_n - A$.
2. Remplacer dans le membre de gauche et faire apparaître un télescopage après inversion des Σ.
3. Trigonaliser et utiliser la question précédente.

38 ENS Saclay - Rennes 2024 – Autour du Pfaffien

Pour toute $A \in \mathscr{A}_4(\mathbb{R})$, on pose $\operatorname{Pf} A = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3}$.

1. Montrer que pour toute $A \in \mathscr{A}_4(\mathbb{R})$, $(\operatorname{Pf} A)^2 = \det A$.
2. On admet que $\mathscr{GL}_n^+(\mathbb{R})$ (matrices de déterminant > 0) est connexe par arcs.
   Montrer que pour toute $A \in \mathscr{A}_4(\mathbb{R})$ et toute $B \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$,
   $$\operatorname{Pf}(BAB^\intercal) = \det B \operatorname{Pf} A.$$
   Indication : Pour le cas $\det B < 0$*, considérer la matrice* $D = \operatorname{diag}(-1,1,1,1)$.
3. Soit $R \in \mathscr{SO}_4(\mathbb{R})$. On pose $A = R - R^\intercal$. Montrer l'équivalence entre
   (i) R n'a pas de valeur propre réelle ;
   (ii) $\operatorname{Pf} A \neq 0$;
   (iii) A est inversible.
4. Soit $R_1, R_2 \in \mathscr{SO}_4(\mathbb{R})$, $A_1 = R_1^\intercal - R_1$ et $A_2 = R_2^\intercal - R_2$. On suppose que $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $\operatorname{Pf} A_1 = \operatorname{Pf} A_2 \neq 0$.
   Montrer qu'il existe $P \in \mathscr{SO}_4(\mathbb{R})$ telle que $R_1 = PR_2P^\intercal$.

Solution de 38 : ENS Saclay - Rennes 2024 – Autour du Pfaffien

Source : RMS 2024 37

1. Raisonner par blocs 2×2 et séparer les cas $a_{1,2}$ nul ou non.

2. Séparer les cas où A et B sont toutes les deux inversibles ou non.
   Montrer que $\varphi : B \mapsto \mathrm{Pf}(BAB^{\intercal})(\det B\,\mathrm{Pf}\,A)^{-1}$ est constante sur $\mathscr{GL}_4^+(\mathbb{R})$ puis sur $D\mathscr{GL}_4^+(\mathbb{R})$ et enfin sur $\mathscr{GL}_4(\mathbb{R})$ en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.
3. L'équivalence entre les conditions (ii) et (iii) découle immédiatement de la question 1.
   Ensuite
   $$A = R - R^T = R - R^{-1} = \left(R^2 - I_n\right)R^{-1} = (R - I_n)(R + I_n)R^{-1}$$
   donc $\det(A) = \det(R - I_n)\det(R + I_n)$.
   Ainsi A est non inversible si et seulement si R possède une valeur propre dans $\{1, -1\}$.
   D'après le cours, puisque R est orthogonale ses seules valeurs propres réelles possibles sont 1 et -1 .
   Ainsi, non (i) est équivalente à non (iii), si bien que (i) est équivalente à (iii).
   On conclut que les conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.
4. Utiliser le théorème de réduction des isométries.

39 ENS Lyon 2024

Déterminer les matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que M est semblable à $2M$.

Solution de 39 : ENS Lyon 2024

Source : RMS 2024 49

Montrons que ce sont exactement les matrices nilpotentes.

- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M soit semblable à $2M$.
  Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de M, alors 2λ est valeur propre de M puis, par récurrence, $2^k\lambda$ est valeur propre de M pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si λ était non nul, M aurait une infinité de valeurs propres ce qui est contradictoire. Donc $\lambda = 0$ et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, M est nilpotente.
- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
  - Montrons d'abord qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = AM - MA$.
    Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit T_A l'application linéaire définie par $T_A : X \mapsto AX - XA$. On veut donc montrer que $M \in \mathrm{Im}\, T_M$. L'adjointe de T_A est donnée par l'égalité $T_A^*(X) = A^T X - XA^T$. En effet,
    $$\begin{aligned}\langle X, T_A(Y)\rangle &= \mathrm{tr}\, X^T AY - \mathrm{tr}\, X^T YA = \mathrm{tr}\, X^T AY - \mathrm{tr}\, AX^T Y\\ &= \mathrm{tr}\left(X^T A - AX^T\right)Y = \mathrm{tr}\left(A^T X - XA^T\right)^T Y = \left\langle A^T X - XA^T, Y\right\rangle\end{aligned}$$
    Comme $\mathrm{Im}\, T_M = \left(\mathrm{Ker}\, T_M^*\right)^\perp$, montrons donc que $M \in \left(\mathrm{Ker}\, T_M^*\right)^\perp$. Si $X \in \mathrm{Ker}\, T_M^*$, alors X commute avec M^T, et donc $M^T X$ est une matrice nilpotente (car M^T l'est). Par suite, $\mathrm{tr}\, M^T X = 0$. Cela permet de conclure.
  - Soit A telle que $M = AM - MA$, ce qui entraîne que, pour tout $\alpha, \alpha M = \alpha AM - \alpha MA$ puis que
    $$\alpha AM = M(\alpha I_n + \alpha A).$$
    On en déduit par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
    $$(\alpha A)^k M = M(\alpha A + \alpha I_n)^k$$
    puis, pour tout polynôme P, que
    $$P(\alpha A)M = MP(\alpha A + \alpha I_n).$$
    En appliquant ceci aux sommes partielles de l'exponentielle et en passant à la limite, on obtient que
    $$e^{\alpha A}M = e^{\alpha}Me^{\alpha A}$$
    En prenant $\alpha = \ln 2$, on obtient la matrice inversible $Q = e^{\alpha A}$ telle que $QMQ^{-1} = 2M$.

Remarque : une solution alternative consiste à utiliser la décomposition de Jordan (hors programme... Voir X-ENS Maths A 2025 !)

7. Intégration

40 Mines-Ponts 2025

Expliciter la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \mathrm{Arccos}\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t$.

41 Mines-Ponts 2025

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}\,\mathrm{d}x$.

42 Centrale 2022 (Greg)

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x^\beta)}$$
À quelles conditions sur α et β l'intégrale converge-t-elle ?
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$g_n : \lambda \mapsto \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+\lambda x^\beta)}$$
(g_n) converge-t-elle uniformément ? Répondre selon les valeurs de α et β.
3. On suppose que $g_n \xrightarrow{\text{CS}} g$. Donner un développement asymptotique de $g(\lambda)$ lorsque $\lambda \to 0^+$.

43 Mines-Ponts 2021 (Patrick)

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{tx}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
3. Déterminer l'allure du graphe de f.

44 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit $f : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^2 \sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right) & \text{si } t \in]0,1] \end{cases}$

1. L'intégrale de f' converge-t-elle sur $]0,1]$?
2. f' est-elle intégrable sur $]0,1]$?

8. Équations différentielles et calcul différentiel

45 ENS MPI 2025 (Samuel)

Pour $\mu \geqslant 0$, on pose (E_μ) : $y'' - \mu\left(1-y^2\right)y' + y = 0$.

1. Résoudre (E_0).
2. On suppose $\mu > 0$, et on pose
$$\omega(\mu) = 1 + \mu\omega_1 + \underset{\mu\to 0}{\mathrm{o}}(\mu)$$
$$x(\tau,\mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \varepsilon(\tau,\mu)$$
où x_0 et x_1 sont des fonctions bornées et de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que ε est deux fois dérivable par rapport à sa première variable τ, et qu'il existe une fonction $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que pour tout $(\tau,\mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $|\varepsilon|$, $\left|\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right|$ et $\left|\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2}\right|$ sont majorées par $C(\tau)\mu^2$.
On cherche une solution de la forme $t \mapsto x(\omega(\mu)t,\mu)$ de (E_μ). Que peut-on alors dire de x_0, x_1 et ω_1 ?

Solution de 45 : ENS MPI 2025 (Samuel)

Idées de Samuel – *Propositions de l'examinateur*

1. Ok
2. [Calculs...]
DL : on va négliger certains termes
[Calculs] je trouve la forme de x_0.
[Calculs...]
x_0, on connaît. Terme en μ ??
[Calculs...]
EDL$_2$ sur x_1.
Plus beaucoup de temps : stratégie ??

46 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et (E) $\quad y'' - 2xy' + \lambda y = 0$.

1. Montrer que les solutions de (E) sont toutes développables en série entière.
2. Soit f solution de (E) telle que $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(x^k\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
   On pourra utiliser $A = \lambda \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} f(t) \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que f est polynomiale.

47 Mines-Ponts 2025

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation différentielle $y' - y + f = 0$ possède une unique solution bornée.

48 Mines-Ponts 2025

Soit $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$. Déterminer les solutions de : $X' = AX$.

49 Mines-Ponts 2025

On considère l'application $f : P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P^T P \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la différentielle de f en M est surjective.
2. On pose $g = f_{|\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}$. Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, la différentielle de g en M est-elle surjective ?

50 Mines-Ponts 2025

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^2 - xy^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Soit D une droite passant par $(0,0)$. Montrer que la restriction de f à D admet un minimum local en $(0,0)$.

3. La fonction f possède-t-elle un extremum local en $(0,0)$?

51 Centrale 2022 (Aure)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ ne s'annulant pas telle que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a > 0$.
Soit u une fonction bornée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[1,+\infty[$ telle que u est solution de

$$y'' - \frac{f'}{f}y' - \frac{1}{f^2}y = 0$$

1. Soit $h = \dfrac{u'}{f}$. Montrer que $h'(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$. En déduire que $u'(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. Montrer que $u' \to \ell \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que $\ell = 0$.

Solution de 51 : Centrale 2022 (Aure)

Intégration des relations de comparaison.