

1. Suites et séries numériques

1 ENS MPI 2025 (Alexis)

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $\forall n \geq 1$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Quelle est la limite de $(S_n)_n$?

Majoration de la différence ? Le démontrer.

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , 1-périodique.

Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S_n - \int_0^1 f \right| \leq \frac{C}{n^2}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 , 1-périodique.

Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S_n - \int_0^1 f \right| \leq \frac{C}{n^3}$.

4. Que dire si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^∞ et 1-périodique ?

2 Mines-Ponts 2024

Soit (u_n) une suite de réels non nuls et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Étudier la nature de $\sum u_n$.

3 Mines-Ponts 2024

1. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [n, n+1]} |f'(t)|.$$

2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$?

4 Mines-Ponts 2023

On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est divergente.

2. Donner un équivalent de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

2. Suites et séries de fonctions

5 Mines-Ponts MPI 2025 (Alexis) avec préparation

On considère la suite définie par $b_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \sum_{k=1}^n \frac{b_{n-k}}{k!}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq \frac{1}{\ln^n 2}$.

2. Montrer que $R = \mathbb{R} \left(\sum b_n x^n \right) > 0$.

Puis montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{1}{2 - e^x}$.

En déduire R .

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$.

6 Mines-Ponts 2024

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .

2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

7 Mines-Ponts On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

1. Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de S .

2. Donner un équivalent de S en 0 et en 1^- .

8 X-ENS

1. Quelle est la limite simple de (f_n) où $f_n : z \in \mathbb{C} \mapsto \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [1, n]$. Montrer que

$$1 - \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{n}$$

3. En déduire que (f_n) converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} .

3. Probabilités

9 X 2025 (Samuel) On étudie l'existence de $C > 0$ tel que $\forall X, Y$ variid réelles,

$$\mathbb{P}(|X - Y| \leq 2) \leq C \mathbb{P}(|X - Y| \leq 1)$$

1. Montrer l'existence de $C' > 0$ tel que $\forall X, Y$ variid dans \mathbb{Z} , $\mathbb{P}(|X - Y| \leq 2) \leq C' \mathbb{P}(X = Y)$.
2. En déduire le résultat souhaité.
3. Montrer que $C' \geq 3$.

10 Mines-Ponts MPI 2025 avec préparation Dans \mathfrak{S}_n , on considère l'événement

E_i : « $\sigma(i) = i$ ».

1. Calcule $\mathbb{P}(E_i)$.
2. On pose $X_i = \mathbb{1}_{E_i}$ et $S = \sum_{i=1}^n X_i$ la variable aléatoire du nombre de points fixes.
 - (a) Calculer l'espérance de S .
 - (b) Calculer la covariance de X_i et de X_j pour $i \neq j$.
 - (c) Calculer la variance de S .

11 Mines-Ponts 2022 (Théo) sans préparation On choisit au hasard $A, B \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Déterminer

$$\mathbb{P}(A \subset B \text{ ou } B \subset A).$$

12 Mines-Ponts 2023 On tire au hasard un élément A de $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Calculer la probabilité que $|A|$ soit un entier pair.

13 Mines-Ponts 2023 (posé aussi à CCINP...) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . On pose $U = (X_1 \dots X_n)$ et $M = U^T U$.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires $\text{tr} M$ et $\text{rg} M$.
2. Calculer la probabilité que M soit une matrice de projection.

14 ENS MP L 2024 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soient $v_1, \dots, v_n \in E$ tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|v_i\| \leq 1$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [-1, 1]$ et $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i$ satisfait $\|v - w\| \leq \sqrt{n}$.

Indication : non, non, cet exercice est bien au bon endroit.

15 X 2024 Une grille $\{1, 2, 3\} \times \llbracket 1, n \rrbracket$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t = 0$ une goutte d'eau au point $(2, n)$. À chaque instant, si elle se trouve au milieu (ie en un point $(2, k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se déplace à droite (respectivement à gauche) avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à l'instant t .
2. Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

16 ENS PLSR 2024

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

Si N est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z} , on pose $X_{N+n}(\omega) = X_{N(\omega)+n}(\omega)$.

1. Existe-t-il N tel que $\mathbb{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_{N+n} = 1) = \frac{1}{2}$?
2. Existe-t-il N tel que $\mathbb{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\mathbb{P}(X_{N+n} = 1) = \frac{1}{2}$?

4. Algèbre bilinéaire

17 Mines-Ponts MPI 2025 (Samuel) sans préparation

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, y_1), \dots, (x_p, y_p) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer une droite cartésienne $D : y = ax + b$ telle que la somme $S(a, b) = \sum_{i=1}^p (y_i - ax_i - b)^2$ soit minimale.

18 Centrale Maths 1 MPI 2025 (Samuel)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Que signifie $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$? Montrer que cela équivaut à $\text{Sp} A \subset \mathbb{R}_+^*$.
(b) Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe φ un produit scalaire tel que $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure dont les valeurs propres sont strictement positives telle que

$$A = T^T T$$

puis montrer l'unicité.

3. En déduire l'inégalité de Hadamard : si C_1, \dots, C_n désignent les colonnes de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n \|C_i\|_2$$

avec égalité si et seulement si la famille (C_1, \dots, C_n) est orthogonale.

19 Centrale

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique défini positif de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On pose

$$\langle x, y \rangle_u = \langle u^{-1}(x), y \rangle \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$ est un produit scalaire.

Soit v un endomorphisme autoadjoint de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

2. Montrer que $u \circ v$ est diagonalisable.

Si w est un endomorphisme diagonalisable de E , on note $\lambda_{\min}(w)$ (resp. $\lambda_{\max}(w)$) sa plus petite (resp. grande) valeur propre.

3. Montrer que l'image de $E \setminus \{0\}$ par

$$x \mapsto \frac{\langle v(x), x \rangle}{\langle u^{-1}(x), x \rangle}$$

n'est autre que le segment d'extrémités $\lambda_{\min}(u \circ v)$ et $\lambda_{\max}(u \circ v)$.

4. Montrer que

$$\lambda_{\min}(u)\lambda_{\min}(v) \leq \lambda_{\min}(u \circ v) \leq \lambda_{\max}(u \circ v) \leq \lambda_{\max}(u)\lambda_{\max}(v)$$

20 Mines-Ponts

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence de $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A^{-1}$.

2. On pose $D = CBC$. Montrer que

$$(\det(I_n + D))^{1/n} \geq 1 + (\det(D))^{1/n}$$

3. Montrer que

$$(\det(A + B))^{1/n} \geq (\det(A))^{1/n} + (\det(B))^{1/n}$$

21 ENS L 2024

Soit $p \geq 1$ et A, B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$\text{tr}(I_p - A^{-1}B) \leq \ln\left(\frac{\det A}{\det B}\right).$$

2. Soit $n \geq 1$, u_1, \dots, u_n dans \mathbb{R}^p et $\lambda > 0$. Pour $1 \leq m \leq n$, on pose $A_m = \sum_{k=1}^m u_k u_k^T$ et $B_m = \lambda I_p + A_m$.

Montrer que, pour $1 \leq m \leq n$, B_m est symétrique définie positive.

3. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A_n . Montrer que

$$\sum_{m=1}^n \langle u_m, B_m^{-1} u_m \rangle \leq \sum_{i=1}^p \ln\left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda}\right).$$

5. Espaces vectoriels normés

22 Mines-Ponts MPI 2025 sans préparation

On définit, sur $\mathbb{R}[X]$,

$$N(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^1 P(t) t^n dt \right| \quad \|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \quad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)| dt$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

3. Les normes N et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ?

23 Mines-Ponts 2024

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E .

2. Comparer les normes N et $\|\cdot\|_\infty$.

24 Mines-Ponts 2022 (Greg)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Montrer que $N : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sup_{x \in [a,b]} |P(x)|$ est une norme.

2. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $(F_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ et deux normes telles que F_n converge vers P pour l'une et Q pour l'autre.

25 Mines-Ponts 2024

Soit f une forme linéaire continue non nulle sur un espace normé

E . Soit x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que $\|f\| = \frac{|f(x_0)|}{d(x_0, \text{Ker } f)}$

2. Montrer que $\exists a \in E \setminus \{0\}, \|f\| = \frac{|f(a)|}{\|a\|} \iff \exists b \in \text{Ker } f, \|x_0 - b\| = d(x_0, \text{Ker } f)$

26 Mines-Ponts 2024

1. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout couple (A, B) de matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ait $N(AB) = N(BA)$?

27 Mines-Ponts 2024

Déterminer les sous-groupes compacts de (\mathbb{C}^*, \times) .

28 X 2024

1. Soit E un espace vectoriel normé. Que dire d'une partie A de E à la fois ouverte et fermée ?
2. Trouver une partie A de \mathbb{R} telle que $A, \overset{\circ}{A}, \overline{A}, \overset{\circ}{\overline{A}}, \overline{\overset{\circ}{A}}$ soient toutes distinctes.

6. Algèbre linéaire, Réduction

29 Mines-Ponts MPI 2025 (Samuel) avec préparation

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et f_1, \dots, f_p des formes linéaires sur E . Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- (1) (f_1, \dots, f_p) est libre.
- (2) L'application $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{cases}$ est surjective.
- (3) Il existe x_1, \dots, x_p dans E tels que $\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_p(x_1) & \dots & f_p(x_p) \end{vmatrix} \neq 0$.

30 Mines-Ponts MPI 2025 (Alexis) sans préparation

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux dans leur ensemble.

Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix}$ est inversible.

2. Soit $\alpha = \sqrt[3]{2}$ et $\mathcal{F} = (1, \alpha, \alpha^2)$. Montrer que \mathcal{F} est \mathbb{Q} -libre.

31 Centrale Maths 1 MPI 2025 (Alexis)

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On note \mathfrak{S}_n le groupe des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Soit G un groupe fini. Que dire de l'ordre de ses éléments ? Le démontrer dans le cas commutatif.
2. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit l'application linéaire f_σ par $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
 - (a) Montrer que $\sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto f_\sigma \in \text{GL}(E)$ est un morphisme de groupes.
 - (b) Étudier la diagonalisabilité de f_σ , déterminer son spectre et ses vecteurs propres.
3. On dit qu'un sous-espace de E est stable par permutation lorsque tous les f_σ le stabilisent. Déterminer les sous-espaces stables par permutation.

32 Mines-Ponts MPI 2025 sans préparation

Soit \mathbb{K} une \mathbb{R} algèbre intègre associative de dimension finie et $a \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$.

1. Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & ax \end{cases}$ est un isomorphisme.
2. Si $a \notin \mathbb{R}$, montrer que $(1, a)$ est libre.
3. Montrer que a admet un unique polynôme annulateur non nul unitaire de degré minimal, puis qu'il est irréductible et de degré 2.

33 Mines-Ponts 2022 (Théo) avec préparation

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Montrer que f est nilpotente.
2. On suppose $f^{n-1} \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base e de E telle que $\text{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

34 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie de dimension n et $\mathcal{F} = (f_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de formes linéaires.

Montrer que \mathcal{F} est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists x_0 \in E, (f_1(x_0), \dots, f_p(x_0)) = (\lambda_1, \dots, \lambda_p).$$

35 Mines-Ponts 2024

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser ses éléments propres.
2. Déterminer les éléments propres de A .

36 Mines-Ponts 2017

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples.

1. Montrer que si $A = B^2$, alors B est diagonalisable.
2. Montrer que si $AB = BA$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

37 Centrale 2024

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_A = \sum_{i=0}^n a_i X^{n-i}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .

1. Donner et démontrer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

En déduire que $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp } A, \frac{\chi'_A(x)}{\chi_A(x)} = \text{tr}((xI_n - A)^{-1})$.

2. Pour tous $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{C}$, on pose $B_j = \sum_{i=0}^j a_i A^{j-i}$ puis $Q(x) = \sum_{j=1}^n x^{n-j} B_{j-1}$.

Montrer que $Q(x)(xI_n - A) = \chi_A(x)I_n$ et $\text{tr } Q(x) = \chi'_A(x)$.

3. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose $S_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k$. Montrer que $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{i=0}^j a_i S_{j-i} = (n-j)a_j$.

38 ENS Saclay - Rennes 2024 – Autour du Pfaffien

Pour toute $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, on pose $\text{Pf } A = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3}$.

1. Montrer que pour toute $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $(\text{Pf } A)^2 = \det A$.
2. On admet que $\mathcal{G}\mathcal{L}_n^+(\mathbb{R})$ (matrices de déterminant > 0) est connexe par arcs. Montrer que pour toute $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ et toute $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$,

$$\text{Pf}(BAB^T) = \det B \text{Pf } A.$$

Indication : Pour le cas $\det B < 0$, considérer la matrice $D = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

3. Soit $R \in \mathcal{S}\mathcal{O}_4(\mathbb{R})$. On pose $A = R - R^T$. Montrer l'équivalence entre
 - (i) R n'a pas de valeur propre réelle ;
 - (ii) $\text{Pf } A \neq 0$;
 - (iii) A est inversible.
4. Soit $R_1, R_2 \in \mathcal{S}\mathcal{O}_4(\mathbb{R})$, $A_1 = R_1^T - R_1$ et $A_2 = R_2^T - R_2$. On suppose que $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $\text{Pf } A_1 = \text{Pf } A_2 \neq 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{S}\mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que $R_1 = PR_2P^T$.

39 ENS Lyon 2024

Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que M est semblable à $2M$.

7. Intégration

40 Mines-Ponts 2025

Expliciter la fonction $F : x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}(\sqrt{t}) dt$.

41 Mines-Ponts 2025

Calculer $\int_0^1 (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor} dx$.

42 Centrale 2022 (Greg)

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}$$

À quelles conditions sur α et β l'intégrale converge-t-elle ?

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$g_n : \lambda \mapsto \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha(1+\lambda x^\beta)}$$

(g_n) converge-t-elle uniformément ? Répondre selon les valeurs de α et β .

3. On suppose que $g_n \xrightarrow{\text{CS}} g$. Donner un développement asymptotique de $g(\lambda)$ lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$.

43 Mines-Ponts 2021 (Patrick)

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 t^{tx} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .
3. Déterminer l'allure du graphe de f .

44 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t \in]0, 1] \end{cases}$

1. L'intégrale de f' converge-t-elle sur $]0, 1]$?
2. f' est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

8. Équations différentielles et calcul différentiel

45 ENS MPI 2025 (Samuel) Pour $\mu \geq 0$, on pose $(E_\mu) : y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0$.

- Résoudre (E_0) .
- On suppose $\mu > 0$, et on pose

$$\omega(\mu) = 1 + \mu\omega_1 + o_{\mu \rightarrow 0}(\mu)$$

$$x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \varepsilon(\tau, \mu)$$

où x_0 et x_1 sont des fonctions bornées et de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} .

On suppose que ε est deux fois dérivable par rapport à sa première variable τ , et qu'il

existe une fonction $C : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante telle que pour tout $(\tau, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $|\varepsilon|$, $\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right|$ et

$\left| \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} \right|$ sont majorées par $C(\tau)\mu^2$.

On cherche une solution de la forme $t \mapsto x(\omega(\mu)t, \mu)$ de (E_μ) . Que peut-on alors dire de x_0 , x_1 et ω_1 ?

46 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(E) \quad y'' - 2xy' + \lambda y = 0$.

- Montrer que les solutions de (E) sont toutes développables en série entière.
- Soit f solution de (E) telle que $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^k)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

$$\text{On pourra utiliser } A = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} f(t) e^{-t^2} dt.$$

(b) Montrer que f est polynomiale.

47 Mines-Ponts 2025

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que l'équation différentielle $y' - y + f = 0$ possède une unique solution bornée.

48 Mines-Ponts 2025

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$. Déterminer les solutions de : $X' = AX$.

49 Mines-Ponts 2025

On considère l'application $f : P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P^T P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que, si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, la différentielle de f en M est surjective.
- On pose $g = f|_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$. Si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la différentielle de g en M est-elle surjective ?

50 Mines-Ponts 2025

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 - xy^2$.

- Déterminer les points critiques de f .
- Soit D une droite passant par $(0, 0)$. Montrer que la restriction de f à D admet un minimum local en $(0, 0)$.
- La fonction f possède-t-elle un extremum local en $(0, 0)$?

51 Centrale 2022 (Aure)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, +\infty[$ ne s'annulant pas telle que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a > 0$.
Soit u une fonction bornée de classe \mathcal{C}^2 sur $[1, +\infty[$ telle que u est solution de

$$y'' - \frac{f'}{f}y' - \frac{1}{f^2}y = 0$$

- Soit $h = \frac{u'}{f}$. Montrer que $h'(x) = o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$. En déduire que $u'(x) = o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Montrer que $u' \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$.
- En déduire que $\ell = 0$.