Préparation aux Oraux – Exercices Centrale 2

1 Centrale 2025 – Théorème de Liouville

On dit que $x \in \mathbb{R}^+$ est μ-approchable (avec $\mu \in \mathbb{R}$) s'il existe une constante $c > 0$, et une infinité de rationnels $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{c}{q^\mu}$. On note $\mu(x)$ la borne supérieure de l'ensemble des réels vérifiant l'assertion ci-dessus pour ce x, quitte à ce que ce soit $+\infty$.

Un nombre réel positif x est dit **algébrique d'ordre n** s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n tel que $P(x) = 0$ et que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ de degré inférieur strictement à n, $Q(x) \neq 0$. Un **nombre transcendant** est un nombre qui n'est pas algébrique.

On cherche à montrer le théorème suivant

Si x est algébrique d'ordre n, alors $\mu(x) \leqslant n$.

1. (a) Écrire une fonction Python `fibonacci` qui à un entier n associe F_n la n-ième valeur de la suite de Fibonacci définie par $F_0 = F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Que vaut F_{200} ?
   (b) Écrire une fonction `test_approximation` qui à `(x, p, q, c, mu)` associe `True` si $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{c}{q^\mu}$ et `False` sinon.
   (c) Vérifier que $\forall n \in [\![1, 12]\!]$, $\left|\varphi - \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}F_{2n-1}^2}$.
   (d) Écrire une fonction `meilleure_approximation` qui à `(x, n)` associe `(p, q)`, où $\frac{p}{q}$ est la meilleure approximation de x par un rationnel dont q possède n chiffres exactement.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que, pour tout entier $q \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $|qx - p| \leqslant 1$.
   En déduire que $\mu(x) \geqslant 1$.
3. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{p}{q}$ des rationnels distincts, avec $a, p \in \mathbb{Z}$ et $b, q \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{bq}$.
   (b) En déduire que $\mu(x) = 1$ pour tout rationnel x.
4. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est au plus dénombrable. Déduire qu'il existe au moins un nombre transcendant.
   Indication : On rappelle que, si ϕ est une surjection de A (dénombrable) dans B, alors B est au plus dénombrable.
5. Soient x un nombre algébrique d'ordre n, P un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré n tel que $P(x) = 0$, et $M = \sup_{k \in [\![0, n-1]\!]} \left|\frac{a_k}{a_n}\right|$.
   (a) Montrer que P ne possède pas de racine de module supérieur à $1 + M$.
   (b) Montrer le théorème.
6. Montrer que le nombre $N = \sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-n!}$ est transcendant.

2 Centrale 2025 – Décomposition polaire

On considère la fonction $\mu : \left| \begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array}\right.$

1. Montrer que la fonction μ est bien définie.
2. (a) Écrire une fonction Python `generer_diagonale_positive(n)` qui retourne une matrice diagonale de taille n dont les coefficients diagonaux sont tirés aléatoirement dans l'intervalle $]0, 10[$.
   (b) Écrire une fonction Python `generer_Snplusplus(n)` qui retourne une matrice symétrique définie positive de taille n aléatoire à valeurs propres dans $]0, 10[$.
   On pourra utiliser la fonction `ortho_group` importée du module `scipy.stats` : la commande `ortho_group.rvs(dim=n)` génère aléatoirement une matrice orthogonale de taille n.
   (c) Écrire une fonction Python `test_Snplusplus(A)` qui vérifie si une matrice réelle A appartient à $S_n^{++}(\mathbb{R})$ en considérant que deux coefficients numériques sont égaux si leur différence est inférieure à 10^{-5}.
   (d) Pour $n = 3$, générer aléatoirement 10000 couples (O, S), calculer le déterminant des matrices OS obtenues et représenter graphiquement la liste croissante des valeurs obtenues.
3. Montrer que la fonction μ est continue.
4. (a) Montrer que, pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $M^\intercal M = S^2$.
   (b) En déduire que μ est surjective.
5. On admet que deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables. Soient deux couples (O, S) et (O', S') tels que $\mu(O, S) = \mu(O', S')$.
   (a) Montrer que $S^2 = S'^2$.
   (b) Montrer que S est un polynôme en S^2 puis que $S = S'$.
   (c) En déduire que μ est injective.
6. (a) Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer l'adhérence de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que μ^{-1} est continue.