

École Polytechnique – MP

Algèbre

256. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre réel $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ est-il rationnel ?

257. On étudie l'équation $x^2 + y^2 = N(1 + xy)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, où $N \in \mathbb{N}$.
a) Traiter les cas $x = y$, $N = 0$, $N = 1$.

b) On suppose $N \geq 2$ et on se donne (x, y) solution avec $x \neq y$. Montrer qu'on peut se ramener à $x > y \geq 0$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que (y, z) soit solution et tel que $y > z$. En déduire que N est un carré parfait.

c) On considère maintenant l'équation $x^2 + y^2 = -N(1 + xy)$ dans \mathbb{Z}^2 . En adaptant la méthode précédente, trouver tous les couples solutions.

258. Soient $a \in \mathbb{N}$ avec $a \geq 2$ et $P = X^2 + X + a$. On suppose que, pour tout $n \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket$, $P(n)$ est premier. Soit $k \in \llbracket 1, a-2 \rrbracket$.

a) Montrer que si $k+1$ est un carré alors $P(a+k)$ n'est pas premier.

b) Montrer que si $P(a+k)$ n'est pas premier alors $k+1$ est un carré.

259. a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et 1-périodique. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n f(x+ka) \leq \sum_{k=0}^n f(y+ka)$. Montrer que f est constante.

b) Soient p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valuation p -adique de $n!$.

c) Soient $m, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\frac{\prod_{j=1}^m \binom{2jk}{jk}}{\prod_{j=1}^m \binom{2j}{j}} \in \mathbb{N}$.

260. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour une partie I de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle composante de I tout sous-ensemble maximal de I formé d'entiers consécutifs. On note $c(I)$ le nombre de composantes de I .

a) Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est dite I -adaptée lorsque, pour tout $i \in I$, les entiers $\sigma(i)$ et $\sigma(i+1)$ sont consécutifs. Dénombrer les permutations I -adaptées en fonction de $|I|$ et $c(I)$.

b) Soient $c \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Dénombrer les parties I de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $|I| = p$ et $c(I) = c$.

261. Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites d'entiers relatifs. On dit que les deux séries

entières $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ sont congrues modulo m si $a_n \equiv b_n \pmod{m}$ pour tout $n \geq 0$.

On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \pmod{m}$.

a) Soit p un nombre premier. Montrer que $(e^z - 1)^{p-1} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{z^{n(p-1)}}{(n(p-1))!} \pmod{p}$.

b) Soit $m > 4$ un entier non premier.

Montrer que m divise $(m-1)!$, et que $(e^z - 1)^{m-1} \equiv 0 \pmod{m}$.

262. [MPI] Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est dit maximal lorsque $H \neq G$ et aucun sous-groupe de G n'est compris strictement entre H et G . Soit $n \geq 2$.

a) Montrer que $\{\sigma \in \mathcal{S}_n, \varepsilon(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe maximal de \mathcal{S}_n .

b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $\{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(k) = k\}$ est un sous-groupe maximal de \mathcal{S}_n .

c) On suppose que G est fini, et on se donne un sous-groupe H de G tel que $\frac{|G|}{|H|}$ soit un nombre premier. Montrer que H est maximal.

263. Soit φ un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ dans \mathbb{Z} nul sur l'ensemble $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ des suites presque nulles. Montrer que φ est nul.

264. On pose $\alpha = \frac{12 + 5i}{13}$.

a) Montrer que α n'est pas une racine de l'unité.

b) Le nombre α est-il racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans \mathbb{Q} ? dans \mathbb{Z} ?

c) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que α soit racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers dont toutes les racines complexes sont de module 1. Montrer que α est racine de l'unité.

265. a) Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, $z \in \mathbb{C}$ une racine de $A = P^2 + Q^2$. Est-ce que z est racine de $B = P'^2 + Q'^2$? Que dire si z est racine multiple de A ?

b) Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, P s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

c) Montrer que tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$.

d) Est-ce que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ peut s'écrire $U^3 + V^3$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$?

Ind. Montrera que le plus petit facteur premier p de $P(a+k)$ est supérieur ou égal à a , puis que $P(a+k-p) = p$.

266. On admet le résultat suivant. Soient $c \in \mathbb{C}$, U un voisinage de c dans \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de c et telle que $f(z) = O((z-c)^k)$. Alors il existe $r > 0$ et $z_1, \dots, z_{2k} \in U$ distincts tels que : $\forall i \in \llbracket 1, 2k \rrbracket, f(z_i) \in \mathbb{R}$ et $|c - z_i| = r$.

a) Soient $A, B \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que les polynômes non nuls de $\text{Vect}(A, B)$ sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'entre deux racines de A (au sens large) se trouve au moins une racine de B .

b) Démontrer le résultat admis.

267. Soient $F \in \mathbb{R}(X)$, $A = \{x \in \mathbb{Q}, F(x) \in \mathbb{Q}\}$ et $A' = \{x \in \mathbb{Z}, F(x) \in \mathbb{Z}\}$.

a) On suppose A infini. Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.

b) On suppose A' infini. Que peut-on dire de F ?

268. ★★ Soit $f = \sum_{k=0}^n c_k X^k$ un polynôme de degré n à coefficients entiers et dont toutes les racines complexes appartiennent à \mathbb{Q}^* . On pose $H = \max(|c_0|, \dots, |c_n|)$.

a) Montrer que pour le complexe i on a $|f(i)|^2 \leq H^2 \left(\frac{n^2}{2} + n + 1 \right)$.

b) Montrer que $|f(i)|^2 \geq 2^n$.

c) En déduire que si $n \geq 10$ alors $n \leq 5 \log_2(H)$.

269. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$. Montrer que A et B sont semblables.

270. ★ Soient A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $k = \dim \text{Ker}(AB)$. Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de $\text{Ker}(BA)$?

271. [MPI] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C_n = \{-1, 1\}^n$. On pose $H = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), f(C_n) = C_n\}$.

Montrer que H est un groupe pour la loi de composition et déterminer son cardinal.

272. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ où \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{C} . Montrer que la matrice $A = XY + YX - \operatorname{tr}(X)Y - \operatorname{tr}(Y)X + (\operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y) - \operatorname{tr}(XY))I_2$ est nulle.

273. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ tels que P soit scindé à racines simples, $\deg P = n$ et $\deg Q \leq n$. On admet qu'il existe une matrice $B = (b_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ avec $x \neq y$, on ait

$$\frac{P(x)Q(y) - P(y)Q(x)}{x - y} = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} b_{i,j} x^i y^j.$$

Montrer que $\dim \operatorname{Ker} B = |\{z \in \mathbb{C}, P(z) = Q(z) = 0\}|$.

274. ★★ Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u et v dans $\mathcal{L}(E)$, $c = u \circ v - v \circ u$, on suppose $\operatorname{rg} c = 1$.

a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de c est égale à $E_{n-1,n}$.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\operatorname{Im} c) \subset \operatorname{Ker} c$.

c) Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

d) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E non trivial tel que $u(F) \subset F$. Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Étudier la réciproque.

275. On fixe un entier $n \geq 1$ et, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note \mathcal{R}_k l'ensemble des matrices de rang k de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathcal{R}_1 = \{XY^T, (X, Y) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^2\}$.

b) Montrer que \mathcal{R}_2 est l'ensemble des matrices de la forme $X_1Y_1^T + X_2Y_2^T$ avec (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) couples libres de vecteurs de \mathbb{R}^n .

c) Soit $M \in \mathcal{R}_1$. Décrire l'ensemble des couples $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $M = XY^T$.

d) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ conservant le rang.

Soient X_1, X_2, Y_0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et P_1, P_2, Q_1, Q_2 dans \mathbb{R}^n tels que $\varphi(X_1Y_0^T) = P_1Q_1^T$ et $\varphi(X_2Y_0^T) = P_2Q_2^T$, avec (P_1, P_2) libre. Montrer qu'il existe $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ et $Q_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \varphi(XY_0^T) = AXQ_0^T$.

276. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$N(k) = \{N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) ; \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i > j - k \implies N_{i,j} = 0\}$ et

$T(k) = \{I_n + N ; N \in N(k)\}$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $T(k)$ est un sous groupe de $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$.

b) Construire pour, $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, un morphisme de groupes $\varphi_k : T(k) \rightarrow G(k)$ où $G(k)$ est un groupe abélien bien choisi tel que $\operatorname{Ker}(\varphi(k)) = T(k + 1)$.

c) Pour un groupe G , on note $D(G)$ le sous-groupe engendré par $\{ghg^{-1}h^{-1} ; g, h \in G\}$. Montrer que $T(0)$ est résoluble *i.e.* qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $D^q(T(0)) = \{I_n\}$.

277. a) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux distincts. Montrer que l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $X^2 = D$ est fini non vide, déterminer son cardinal.

b) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = I_n + N$.

278. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $R(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^2 = A\}$.

- a) Déterminer le cardinal maximal d'une famille de matrices de $R(I_n)$ non semblables deux à deux.
 b) On suppose A diagonalisable avec n valeurs propres distinctes. Déterminer le cardinal de $R(A)$.
 c) Est-il vrai que, si A est diagonalisable, toutes les matrices de $R(A)$ le sont ?
 d) Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet-elle une racine carrée ?
 e) On pose $U_n = \{I_n + N, N \text{ nilpotente}\}$. Montrer que toute matrice A de U_n admet une unique racine carrée dans U_n .

279. * Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$\mathcal{IA} = \sup \{r \in \mathbb{N}; \exists A_1, \dots, A_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall i, A_i^2 = I_n \text{ et } \forall i \neq j, A_i A_j = -A_j A_i\}$.

- a) Si n est impair, montrer que $\mathcal{IA}(n) = 1$.
 b) Soient $s, t \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{IA}(2^s(2t+1)) = 2s+1$.

280. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ soit une base de \mathbb{R}^n .

b) Soient $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$.

- i) À quelle condition la matrice M est-elle diagonalisable ?
 ii) À quelle condition existe-t-il $x \in \mathbb{R}^3$ tel que (x, Mx, M^2x) soit une base de \mathbb{R}^3 ?
 iii) On suppose que $b_1 b_2 b_3 = 1$. Montrer qu'il existe un unique $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que M

soit semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

281. ** Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de $\text{GL}(V)$.

a) On suppose que $G = \text{GL}(V)$. Que vaut $\text{Vect}(G)$? La réciproque est-elle vraie ?

On suppose maintenant que, pour tout $g \in G$, $g - \text{id}$ est nilpotent.

b) Quels sont les éléments diagonalisables de G ?

c) On suppose que G est fini et que $\text{Vect}(G) = \mathcal{L}(V)$. Quelle est la dimension de V ?

d) Si G n'est plus fini mais que $\text{Vect}(G) = \mathcal{L}(V)$, quelle est la dimension de V ?

282. * a) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice complexe dont les valeurs propres sont de module strictement inférieur à R . Montrer que $\sum a_n M^n$ converge.

b) Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que, pour toute matrice M à spectre inclus dans $\overline{D(0, R)}$ et admettant une valeur propre de module R , la série $\sum a_n M^n$ diverge ?

c) Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que, pour toute matrice M à spectre inclus dans $\overline{D(0, R)}$ admettant une valeur propre de module R , la série $\sum a_n M^n$ converge ?

d) Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

On pose $f^{(k)} : z \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^n$.

Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_M = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont distincts

et de module $< R$ et les α_i dans \mathbb{N}^* .

i) Montrer l'existence de $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, \alpha_i - 1 \rrbracket, f^{(k)}(\lambda_i) = P^{(k)}(\lambda_i)$.

ii) On suppose que M est diagonalisable. Montrer que $f(M) = P(M)$.

iii) Est-ce toujours le cas si on ne suppose plus M diagonalisable ?

283. Soient $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})$, g une surjection continue croissante de $[-1, 1]$ sur lui-même. On considère F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie stable par $f \mapsto f \circ g$. On note ϕ l'endomorphisme de F défini par $\phi : f \mapsto f \circ g$.

a) Montrer que 1 est la seule valeur propre de ϕ .

b) En déduire que $\phi = \text{id}_F$.

c) Que peut-on dire des valeurs propres possibles de ϕ si g n'est plus supposée surjective ?

284. Soit p un nombre premier, A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Démontrer que $\text{tr}((A + B)^p) \equiv \text{tr}(A^p) + \text{tr}(B^p) \pmod{p}$.

285. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit matriciel. On note $D = \{\delta \in \mathcal{L}(H) ; \forall (A, B) \in H^2, \delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)\}$.

a) Soit $C \in H$. Montrer que $\delta : A \mapsto CA - AC$ est dans D , et exprimer simplement e^δ .

b) Soit $\delta \in D$. Montrer que $\forall A, B \in H, e^\delta(AB) = e^\delta(A)e^\delta(B)$.

c) Retrouver le résultat de la question précédente en considérant l'application

$f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t\delta} (e^{t\delta}(A) e^{t\delta}(B))$ et en calculant f' .

d) Soit $\delta \in D$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note H_λ le sous-espace caractéristique de δ associé à λ (éventuellement $\{0\}$). Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, A \in H_\lambda$ et $B \in H_\mu$. Montrer que $AB \in H_{\lambda+\mu}$.

286. a) Soient $k, m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit \mathbb{R}^m de sa structure euclidienne canonique. Soit (v_1, \dots, v_n) une famille de vecteurs unitaires de \mathbb{R}^m tels que $\langle v_i, v_j \rangle \leq -1/k$ pour tous i, j distincts. Montrer que $n \leq k + 1$.

b) Montrer qu'il existe une famille (v_1, \dots, v_{k+1}) de vecteurs unitaires de \mathbb{R}^k tels que $\langle v_i, v_j \rangle = -1/k$ pour tous i, j distincts.

287. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Tr}(f - \text{id}) = 0$ et $\text{rg}(f - \text{id}) = 1$ si et seulement s'il existe $a \in E$ et $\ell \in E^*$ tel que $\ell(a) = 0$ et $f = \text{id} + \ell a$. On dit alors que f est une transvection.

Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire telle que : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists y \in E, \varphi(x, y) \neq 0$ et $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$.

Soit $G = \{u \in \text{GL}(E) ; \forall x, y \in E, \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)\}$.

b) Montrer que G est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$.

- c) Montrer que G contient les applications de la forme $\text{id} + \lambda \varphi(a, \cdot)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in E$.
 d) Montrer que G est engendré par les transvections de la forme indiquée en c).

288. [MPI] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\alpha_O = |\det(\psi_O)|$ où $\psi_O : A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto O^T A O$.

289. Pour $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $-1 \notin \text{Sp}(M)$, on pose $T(M) = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $-1 \notin \text{Sp}(M)$.

a) Montrer que T est bien définie sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

b) Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $T(A) \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

c) Si $B \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$, montrer que $T(B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

d) Calculer $T \circ T(A)$ si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

e) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $T(A)$.

f) Dédurre des questions précédentes que toute matrice de $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ est orthosemblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$.

290. On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique.

a) Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto \langle M^{-1}x, y \rangle$ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

b) Soient $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que MN est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectre inclus dans $i\mathbb{R}$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectre inclus dans $i\mathbb{R}$. Existe-t-il $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = MN$?

291. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

a) Soit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_{2n}$.

Montrer l'équivalence : $M^T J \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T J M = J$.

b) On note $C = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), M^2 = -I_{2n} \text{ et } M^T J \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})\}$. Montrer que, pour tout $M \in C$, $M + J \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.

c) Pour $M \in C$, on note $S_M = (M + J)^{-1}(M - J)$. Montrer que $S_M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, \|S_M X\|_2 < \|X\|_2$.

d) Montrer que, pour tout $M \in C$, $S_M J + J S_M = 0$.

292. Les espaces \mathbb{R}^p sont munis de leurs normes euclidiennes canoniques. Soient d et D des entiers ≥ 1 . Étant donné $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$, on dit que (p_0, \dots, p_n) se plonge isométriquement dans \mathbb{Q}^D s'il existe $q_0, \dots, q_n \in \mathbb{Q}^D$ vérifiant $\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|$ pour tous $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

a) On suppose que (p_0, \dots, p_n) se plonge isométriquement dans \mathbb{Q}^D . Soit p une combinaison linéaire à coefficients rationnels de p_0, \dots, p_n . Montrer que (p, p_0, \dots, p_n) se plonge isométriquement dans \mathbb{Q}^D .

b) Soient $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|p_i - p_j\|^2 \in \mathbb{Q}$ pour tous $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que (p_0, \dots, p_n) se plonge isométriquement dans \mathbb{Q}^{4d} . On admettra que tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers.

293. a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}) > 0$.

b) On pose $A_k = (t^{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq k}$ où $t \in \mathbb{R}^{+*}$. Calculer $\det A_k$.

c) On pose $A = \left(\frac{1}{1 + |i-j|} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Démontrer que A est symétrique définie positive.

294. On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique.

a) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ une base orthonormée de F . On pose : $\tau_F(A) = \sum_{i=1}^k \langle f_i, Af_i \rangle$. Montrer que $\tau_F(A)$ ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

Dans la suite de l'exercice, on suppose $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on note $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A , comptées avec multiplicité.

b) Déterminer le meilleur encadrement possible de $\tau_F(A)$ en fonction de F et de $\text{Sp}(A)$.

c) On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = A + tE_{1,1}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lambda_1(t) \geq \dots \geq \lambda_n(t)$ les valeurs propres de $A(t)$. Montrer que : $\forall t \geq 0$, $\lambda_n(t) \geq \lambda_n$ et $\lambda_1 \geq \lambda_2(t)$.

d) Déterminer un équivalent simple de $\lambda_1(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

Analyse

295. a) Soient N_1 et N_2 deux normes sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E . Montrer que si N_1 et N_2 ont la même sphère unité alors $N_1 = N_2$.

b) On pose $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $(f, g) \in E^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|xf + yg\|_\infty$ soit une norme sur \mathbb{R}^2 .

c) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, dont on note $\| \cdot \|$ la norme. Soit p une autre norme sur E . On note S et S_p les sphères unité respectives pour $\| \cdot \|$ et p . Montrer que $d : x \in S \mapsto \sup_{y \in S_p} |\langle x, y \rangle|$ est à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} , que $k = \sup_{y \in S_p} \|y\|$ est un réel strictement positif, et enfin que d est k -lipschitzienne pour la norme $\| \cdot \|$.

d) On note $B = \{f \in E, p(f) \leq 1\}$ et, pour $x \in S$, $D_x = \{z \in E; |\langle x, z \rangle| \leq d(x)\}$. Montrer que $B = \bigcap_{x \in S} D_x$.

296. ★★ Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que tout convexe non borné contient au moins une demi-droite. On pourra commencer par le cas d'un convexe fermé.

297. ★★ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit R_k la borne inférieure de l'ensemble E_k des $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tels qu'il existe une boule fermée de \mathbb{R}^2 euclidien de rayon r contenant au moins k points de \mathbb{Z}^2 .

a) Calculer R_k pour $k = 2, 3, 4$.

b) Si $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que R_k est le minimum de E_k .

c) Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $4R_k^2$ est entier.

d) Donner un équivalent de R_k lorsque k tend vers $+\infty$.

298. ★★ Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Déterminer les formes linéaires continues φ sur E telles que, pour tout $(f, g) \in E^2$ tel que $\varphi(fg) = 0$, on ait $\varphi(f) = 0$ ou $\varphi(g) = 0$.

299. ★★ Soit $\rho : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue telle que, pour tout t , $\rho(t)^2 = \rho(t)$.

a) Montrer que $t \mapsto \operatorname{rg} \rho(t)$ est constante.

b) Montrer l'existence de $u \in \mathcal{C}^0([0, 1], \operatorname{GL}_n(\mathbb{C}))$ telle que $\forall t, \rho(t) = u(t)\rho(0)u^{-1}(t)$.

c) On suppose de plus que $\rho(1) = \rho(0)$. Montrer que l'on peut choisir u de sorte que l'on ait aussi $u(0) = u(1)$.

300. Soit $n \geq 2$. On note \mathcal{B}_n l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire les $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket,$

$\sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1$ et $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} \geq 0$. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de permutation associée à σ ; la matrice P_σ est dans \mathcal{B}_n .

a) Montrer que \mathcal{B}_n est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Un élément M de \mathcal{B}_n est dit extrémal lorsqu'il ne peut pas s'écrire $M = (1-t)A + tB$ avec A, B éléments distincts dans \mathcal{B}_n et $t \in]0, 1[$.

b) Montrer que les P_σ sont des points extrémaux de \mathcal{B}_n .

c) On fixe un élément M de \mathcal{B}_n .

Pour une partie I de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\mathcal{F}(I) = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket; \exists j \in I, m_{i,j} > 0\}$.

i) Montrer que $|I| \leq |\mathcal{F}(I)|$.

ii) Montrer qu'il existe une injection $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_{i, f(i)} > 0$.

iii) En déduire l'ensemble des points extrémaux de \mathcal{B}_n .

e) Montrer que \mathcal{B}_n est l'enveloppe convexe des P_σ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

301. ★★ On munit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que

$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge.

b) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_{3^n}(x)$.

i) Montrer que f est bien définie et continue sur $[-1, 1]$.

ii) Montrer que $d(f, \mathbb{R}_{3^n}[X]) = \inf_{P \in \mathbb{R}_{3^n}[X]} \|f - P\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Ind. On pourra considérer les points $x_k = \cos(\pi(1 + k3^{-n-1}))$ pour $k \in \llbracket 0, 3^{n+1} \rrbracket$.

302. Soient K une fonction continue de $[0, 1]^2$ dans \mathbb{R} , E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

a) Si $f \in E$, soit $T_K(f)$ la fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que $\forall x \in [0, 1]$, $T_K(f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$. Montrer que T_K est un endomorphisme continu de l'espace normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

b) On suppose que K est à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} , que $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et que l'espace propre $E_\lambda(T_K)$ contient une fonction non identiquement nulle à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Montrer que $E_\lambda(T_K)$ est de dimension 1.

303. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \rightarrow 0$. Montrer que $u_n \rightarrow 0$.

304. ★ [MPI] Soient $a < b$ réels et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $t \in [a, b]$, il existe une suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers tels que $tu_n - k_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

305. ★★ Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\beta = 1/\alpha$. Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $z_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{\alpha n + 1}{\alpha(n+1)} z_n$.

a) Donner un équivalent de z_n et sa valeur exacte lorsque $\beta \in \mathbb{N}^*$.

b) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$ et $y_n = \alpha x_n + (1 - \alpha)\mu_n$. On suppose que $y_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x_n \rightarrow x$.

306. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = |\{(p, q) \in \mathbb{N}^2, p^2 + q^2 = n\}|$.

a) Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k$.

b) Étudier la nature de la suite (u_n) .

c) Montrer que (u_n) n'est pas bornée.

307. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$.

a) On suppose que $a_0 = 1/2$. Montrer que $\frac{1}{a_n} - n \sim \ln n$ quand $n \rightarrow +\infty$.

b) On suppose $a_0 > 1$. Déterminer la limite de (a_n) puis un équivalent de a_n .

c) Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n .

308. a) Pour $n \geq 3$, justifier l'existence de $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ avec $0 < x_n < y_n$ solutions de $x - n \ln x = 0$.

b) Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n et y_n .

309. Construire une suite strictement croissante $(p_n)_{n \geq 2}$ d'entiers avec $p_2 = 2$ telle qu'il

existe $C > 0$ vérifiant, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{\ln k} \geq C$, et telle que la série de terme général $2^{-(p_{n+1}-p_n)}$ diverge.

310. On pose $\alpha = 4 \sum_{k=0}^{499999} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer qu'exactlyement une des 16 premières décimales de α diffère de la décimale de π correspondante.

311. Soient $p > 0$ et $q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout

$$(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^+)^{2n}, \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

312. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ de classe C^∞ telle que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ et quand $x \rightarrow +\infty$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f^{(n)}(x_n) = 0$.

a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x^n f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

c) On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour tout $x > 0$. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe

$$a_{n,0}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{Z} \text{ tels que } g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \frac{f^{(n-k)}(x)}{x^{k+1}} \text{ pour tout } x > 0.$$

d) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $(-1)^n g^{(n)}(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

313. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que : $f^2 \leq 1$ et $(f')^2 + (f'')^2 \leq 1$. Le but est de montrer par l'absurde que $g = f^2 + (f')^2 \leq 1$. On suppose donc qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $f(t)^2 + f'(t)^2 > 1$.

On pose : $E = \{x \in \mathbb{R} ; \forall y \in [\min(t, x), \max(t, x)], f(y)^2 + f'(y)^2 > 1\}$.

a) Montrer que E est un intervalle ouvert.

b) Montrer que f' ne s'annule pas sur E .

c) Conclure.

314. Si $(\phi_k)_{1 \leq k \leq 4}$ est une famille de fonctions de $] -1, 1[$ dans \mathbb{R} , on dit que $(\phi_k)_{1 \leq k \leq 4}$ vérifie (C) si $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < \phi_4$ sur $]0, 1[$ et $\phi_2 < \phi_4 < \phi_1 < \phi_3$ sur $] -1, 0[$.

a) Montrer qu'il n'existe pas de famille $(\phi_k)_{1 \leq k \leq 4}$ de fonctions polynomiales vérifiant (C).

Ind. On pourra étudier la valuation de $\phi_i - \phi_j$ pour $i \neq j$.

b) Existe-t-il une famille $(\phi_k)_{1 \leq k \leq 4}$ de fonctions de classe C^∞ vérifiant (C) ?

315. Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que (*) : $\forall x \in \mathbb{R}, s(x+1) = s(x) + \frac{1}{1+x^2}$ et $s(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, s(x) \geq 0$.

b) A-t-on existence et unicité de s vérifiant (*) ? Déterminer les s solutions.

c) Que se passe-t-il si on remplace la condition $s(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ par la condition $s(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$?

316. a) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que f est affine si et seulement si, pour tout réel x , on a $\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$.

b) Montrer que le résultat de la question précédente peut tomber en défaut sans hypothèse de continuité.

317. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$. On suppose qu'il existe $\alpha, \eta > 0$ tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \alpha F(x) F(y) \leq F(x+y) \leq \eta F(x) F(y).$$

a) On suppose que F est de classe \mathcal{C}^1 et que $\frac{F'}{F}$ est bornée. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ bornée tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^{\gamma x} H(x)$.

b) On revient au cas général. Montrer qu'il existe une unique fonction $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\frac{F}{G}$ soit bornée et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, G(x+y) = G(x)G(y)$.

318. ★ Soient $M, m \in \mathbb{R}$ avec $0 < m < M$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, [m, M])$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Soit

$$(*) \text{ l'équation fonctionnelle } \forall t \in \mathbb{R}, g(t) = 1 + \frac{g(qt)}{f(t)}.$$

a) On suppose $m > 2$ ou $M < 1/2$. Montrer qu'il existe une unique solution bornée de (*).

b) Montrer que les solutions bornées de (*) ne s'annulent pas.

319. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer qu'il existe une unique suite $(G_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n P^{(n)}.$$

b) Expliciter (G_n) pour φ vérifiant : $\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = \int_0^x P(t) dt$.

c) On suppose que, pour tout $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, si P admet un minimum local en a alors $\varphi(P)(a) = 0$. Montrer qu'il existe $Q \in E$ tel que, pour tout $P \in E, \varphi(P) = Q P'$.

d) On suppose que, pour tout $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, si P admet un minimum local en a alors $\varphi(P)(a) \geq 0$. Montrer qu'il existe $Q, R \in E$ tels que, pour tout $P \in E, \varphi(P) = Q P' + R P''$ avec R positif sur \mathbb{R} .

e) Donner une preuve directe de l'égalité trouvée en **b)**.

320. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe quatre réels strictement positifs α, β, A, B tels que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq A |x - y|^\alpha$ et $|g(x) - g(y)| \leq B |x - y|^\beta$

et $\alpha + \beta > 1$. On pose $\zeta : s \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. On fixe deux réels $a < b$.

a) Pour une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$, on pose $J(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k))$. Montrer que $|J(\sigma) - f(a)(g(b) - g(a))| \leq AB \zeta(\alpha + \beta) (2(b-a))^{\alpha+\beta}$.

b) Montrer qu'il existe un réel $I_{a,b}(f, g)$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$, $\max_k |x_{k+1} - x_k| < \delta \Rightarrow |J(\sigma) - I_{a,b}(f, g)| < \varepsilon$.

321. On note S l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une fonction continue $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

322. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On pose $h : t \in [0, 1] \mapsto \inf_{s \in [0, t]} f(s)$ et $g = f - 2h$.

a) Montrer que g est continue, positive et que $g(0) = 0$.

b) Montrer que si f est affine par morceaux alors g l'est aussi.

c) On suppose que f atteint son minimum en 1. On pose $q : t \in [0, 1] \mapsto \inf_{s \in [t, 1]} g(s)$. Montrer que $f = g - 2q$.

323. ★★ Soit \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers.

On pose $\Psi(x) = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P}, \alpha \in \mathbb{N}^* \\ p^\alpha \leq x}} \ln p$ et $T(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right)$.

a) Montrer que $T(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \ln(n) = x \ln(x) - x + O(\ln x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

b) Montrer que $T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n \leq x} (-1)^{n-1} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) = x \ln 2 + O(\ln x)$.

324. [MPI] Soit f une bijection de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ , de réciproque notée g .

a) Montrer que, pour $x \geq 0$, $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(t) dt = x f(x)$.

b) Dédurre que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $xy \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y g(t) dt$.

325. [MPI] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement positive sur $]0, 1[$.

a) Calculer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 f(x)^p dx \right)^{1/p}$.

b) Calculer $\lim_{p \rightarrow 0^+} \left(\int_0^1 f(x)^p dx \right)^{1/p}$.

326. Soit f la fonction 1-périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\forall x \in [0, 1[, f(x) = x - \frac{1}{2}$. Pour i

et j dans \mathbb{N}^* , calculer $\int_0^1 f(ix) f(jx) dx$.

327. [MPI] Pour $a, b > 0$, on définit $J_{a,b} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2}}$.

a) Montrer que $J_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}}$.

b) Montrer que $J_{a,b} = J_{\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}}$.

328. [MPI] Déterminer les réels α et β tels que $\int_0^{+\infty} |\sin t|^\alpha t^\beta dt < +\infty$.

329. [MPI] a) Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $I_f = \left\{ p > 0, \int_{\mathbb{R}} |f|^p < +\infty \right\}$. Montrer que I_f est un intervalle et exhiber f telle que $I_f =]a, b[$, $]0, b[$ ou $]b, +\infty[$ pour $0 < a < b$.

b) Déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p}$.

330. [MPI] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur \mathbb{R} . On pose $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Montrer que g est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} et sur \mathbb{R}^{-*} . Exprimer $\int_{-\infty}^0 g + \int_0^{+\infty} g$ en fonction de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

331. [MPI] On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n : x \in \mathbb{R} \mapsto (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n(e^{-x^2/2})}{dx^n}$.

a) Montrer que p_n est polynomiale, préciser son degré et son coefficient dominant, et démontrer que p_n est paire ou impaire.

b) Calculer $\int_{\mathbb{R}} p_m(x) p_n(x) e^{-x^2/2} dx$ pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale multiple

$$I = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k^2\right) dx_1 \cdots dx_n.$$

Ind. On pourra s'intéresser au déterminant de la matrice $(p_{i-1}(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

332. [MPI] Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R} telle que $\int_{\mathbb{R}} f_i f_j =$

$\delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $K_N(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x) f_k(y)$.

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_p(x_1, \dots, x_p) = \det((K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq p})$.

Calculer $\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \varphi_p(x_1, \dots, x_p) dx_1 \cdots dx_p$.

333. a) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Calculer les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(1+t^a)}{t} dt$ et $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

b) Soit $(a_n)_n \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{n \in I} a_n$ soit injective, $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ désignant

l'ensemble des parties finies de \mathbb{N} . Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \leq 2$.

c) Soit $(a_n)_n \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle qu'il n'existe pas d'entier n ni de partie finie I de $\mathbb{N} \setminus \{n\}$ telle

que $a_n = \sum_{k \in I} a_k$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \leq 50$.

334. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R} alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0.

335. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \mapsto \pi \cotan(\pi x) - \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x+k}$.

a) Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ vers une fonction f , et que l'on peut prolonger f par continuité à \mathbb{R} .

b) Montrer que la fonction prolongée par continuité est de classe C^1 sur \mathbb{R} et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4f'(x) = f'\left(\frac{x}{2}\right) + f'\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

c) En déduire que f est identiquement nulle sur \mathbb{R} .

d) On pose $g : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$. Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que le développement en série entière de $x \mapsto g(x) - 1 + \frac{x}{2}$ ne contient que des termes

pairs. On note $g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}$.

e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $\zeta(2n)$ en fonction de a_n . *Ind.* On pourra considérer $g(ix)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

336. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Si $t \geq 0$, on pose $g_t : x \in [0, 1] \mapsto \inf \{f(y) + t|y - x|, y \in [0, 1]\}$.

a) Si $t \geq 0$, montrer que g_t est une fonction continue.

b) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la suite $(g_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante et qu'elle converge vers $f(x)$.

c) Montrer que $(g_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

337. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(2 \cos(x)) = 2 \cos(nx).$$

b) Pour $x, y \in [-2, 2[$ avec $x \neq y$, on pose $S(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} T_n(x) T_n(y)$.

i) Montrer que $S_n(x, y)$ est bien défini.

ii) Montrer que, pour $x, y \in [-2, 2[$ avec $x \neq y$, on a $S(x, y) = -2 \ln |x - y|$.

338. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) À quelle condition sur α la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n+x}$ est-elle définie sur \mathbb{R}^+ ?

b) Lorsque f est définie sur \mathbb{R}^+ , déterminer sa limite, puis un équivalent, en $+\infty$.

c) On fixe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d > 0$, sans racine dans $[1, +\infty[$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, d) pour que $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{P(n+x)}$ soit définie sur \mathbb{R}^+ . Dans ce cas, donner un équivalent de g en $+\infty$.

339. ★ a) On fixe un entier $d \geq 0$. Soit $(c_k)_{k \leq d}$ une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}_{\leq d} = \{k \in \mathbb{Z}, k \leq d\}$. On suppose qu'il existe un réel $R > 0$ telle que $(c_k z^k)_k$ soit sommable pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$; pour un tel z , on pose $g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\leq d}} c_k z^k$. On

suppose enfin que c_1, \dots, c_d sont tous rationnels et que $g(a) \in \mathbb{Z}$ pour une infinité d'entiers a . Montrer que $c_0 \in \mathbb{Q}$ et $c_k = 0$ pour tout $k < 0$.

b) Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que, pour tout entier n assez grand, $P(n)$ est la puissance s -ième d'un entier. Soient τ_1, \dots, τ_s dans \mathbb{Z} . Montrer qu'il existe une fonction g vérifiant les hypothèses de la question précédente (pour un certain d) et telle que, pour tout complexe z de module assez grand, $\prod_{k=1}^s P(z + \tau_k) = g(z)^s$. En déduire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q^s$ et $\forall k \in \mathbb{Z}, Q(k) \in \mathbb{Z}$.

340. Soient $\theta > 1$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$ dont θ est racine de multiplicité 1 et dont les autres racines complexes sont de module < 1 et dont $1/\theta$ n'est pas racine. Soit $Q = X^n P(1/X)$.

a) Montrer que $f : z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon

$1/\theta$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ ce développement.

b) Montrer que $g : z \mapsto f(z)(1 - \theta z)$ est développable en série entière de rayon > 1 . On note

$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. Montrer que les c_n sont dans \mathbb{Z} et que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(e^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2$.

c) Démontrer que $1 + \theta^2 = b_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - \theta b_{n-1})^2$.

d) On suppose que $P(0) > 0$. Montrer que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

341. [MPI] a) On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_n .

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-2}^2 x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx$. Prouver l'existence d'une constante $c > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = c I_n$ et la déterminer.

342. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

On pose $u_0 = 4^m, u_1 = 4^m - 1$ et, pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $u_k = -1 + \frac{2m - k}{2m} u_{k+1} + \frac{k}{2m} u_{k-1}$

et $v_k = m \int_0^1 \frac{(1+x)^{2m-k}}{x} ((1+x)^k - (1-x)^k) dx$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $v_k = u_k$.

b) Donner un équivalent de $W_m = m \int_0^1 \frac{(1+x)^m}{x} ((1+x)^m - (1-x)^m) dx$.

343. Déterminer un équivalent de $\int_0^{+\infty} (te^{-t})^x dt$ quand x tend vers $+\infty$.

344. ★★ Soit E l'ensemble des fonctions y de classe C^2 de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $y''(t) + e^t y(t) = 0$. Soit $y \in E \setminus \{0\}$.

a) Montrer que les zéros de y sont isolés.

b) Montrer que les zéros de y peuvent être rangés en une suite strictement croissante $(t_n)_{n \geq 0}$ tendant vers $+\infty$.

c) Donner un équivalent de t_n .

345. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$.

a) Soient p un projecteur de E et $a \in \mathcal{L}(E)$ tels que $ap + pa = a$. Montrer que $\text{tr } a = 0$.

b) On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E . Pour $p \in \mathcal{P}(E)$, décrire l'espace tangent à $\mathcal{P}(E)$ en p . Quelle est sa dimension ?

Géométrie

346. Soit (u, v) une base de \mathbb{R}^2 . Donner une condition nécessaire et suffisante sur (u, v) pour qu'il existe un polygone régulier à n côtés dont les sommets sont tous dans $\mathbb{Q}u + \mathbb{Q}v$.

Probabilités

347. [MPI] Un tiroir contient $2n$ chaussettes, constituant n paires. On tire successivement et aléatoirement les chaussettes du tiroir les unes après les autres jusqu'à avoir tiré une paire. Quelle est l'espérance du nombre total de chaussettes tirées ? *Ind.* Pour simplifier le résultat,

on pourra utiliser un raisonnement probabiliste pour établir que $\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} 2^{-k} = 1$.

348. On organise un tournoi avec une infinité $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de joueurs. Les modalités sont les suivantes : J_0 et J_1 s'affrontent, le gagnant affronte J_2 et ainsi de suite : le gagnant de chaque partie affronte le joueur suivant lors de la partie suivante. On considère tous les matchs comme indépendants et on note $p_n = \mathbf{P}(J_n \text{ remporte son premier match})$. Le tournoi s'arrête lorsqu'un joueur remporte deux matchs successifs. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de matchs joués jusqu'à l'arrêt du tournoi. Pour les deux premières questions, on fixe $\alpha \in]0, 1[$ et on suppose que : $\forall n \geq 2, p_n = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$.

a) Montrer que T est presque sûrement finie.

b) Montrer que T est d'espérance finie.

c) Dans cette question, on fixe $N \geq 2$ et la condition de victoire devient : un joueur remporte le tournoi quand il a gagné N matchs consécutifs. Ainsi le cas précédent correspond au cas $N = 2$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = p \in]0, 1[$.

On note $a_n = \mathbf{P}(T \geq n)$ avec, pour $k \leq N$, $a_k = 1$. Déterminer une relation de récurrence entre les a_n .

349. [MPI] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $|\sigma|$ le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints (y compris les cycles de longueur 1).

a) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $C_k = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n, |\sigma| = k\}|$.

Calculer f_n où $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n C_k x^k$.

b) Soit σ_n une variable de loi uniforme sur \mathcal{S}_n . Donner un équivalent de l'espérance de $|\sigma_n|$.

c) Montrer que $\frac{|\sigma_n|}{\ln(n)}$ tend vers 1 en probabilités quand $n \rightarrow +\infty$.

350. [MPI] a) Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbf{E}(X(X-1)\cdots(X-p+1))$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et calculer $\mathbf{E}(1/(X+1))$ et $\mathbf{E}(1/(X+2))$.

b) Soient A un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Une p -partition de A est une partition de X formée de p sous-ensembles (non vides) de X . Soit B un ensemble fini de cardinal m . Dénombrer, pour une p -partition de \mathcal{F} de A , les applications de A dans B dont \mathcal{F} est l'ensemble des fibres non vides (à savoir des ensembles non vides de la forme $f^{-1}\{b\}$ où $b \in B$).

c) En utilisant les deux questions précédentes, exprimer le nombre de partitions de A comme la somme d'une série numérique.

351. Soient $p \in]0, 1[$ et $t > 0$. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = -1) = 1 - p$ et $N \sim \mathcal{P}(t)$ indépendante des X_n . On pose :

$$S_n = \sum_{i=0}^n X_i.$$

a) Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\mathbf{P}(S_N = n)$.

b) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} y^n \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ n+i \geq 0}} \frac{x^{n+2i}}{n!(n+i)!} = e^{xy+1/y}.$$

352. Soient $p \in]0, 1[$, $m \geq 2$ et $\xi = e^{2i\pi/m}$.

a) Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \quad \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ m|k}} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (b + \xi^j a)^n.$$

b) Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . On pose : $A_n = (m \mid X_1 + \cdots + X_n)$ et $u_n = \mathbf{P}(A_n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| u_n - \frac{1}{m} \right| \leq e^{-8pqn/m^2}$ où $q = 1 - p$.

353. [MPI] Soit X une variable aléatoire discrète positive ayant un moment d'ordre 2 et telle que $\mathbf{E}(X^2) > 0$. Montrer que, pour $t > 0$, $\mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) \leq -t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{\mathbf{E}(X^2)}\right)$.

354. ★★ Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans \mathbb{N}^* . On suppose de plus que $\mathbf{E}(X_1^2) < +\infty$, et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_i}$ pour $n \geq 1$.

- a)** Montrer que, pour tout ω , $(T_n(\omega))_{n \geq 1}$ a une limite dans $[0, +\infty]$.
b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ et une suite strictement croissante $(n_k)_{k \geq 1}$ d'entiers ≥ 1 vérifiant $n_{k+1} \geq 2n_k$ et $\mathbf{P}(S_{n_k} \geq 2n_k \mathbf{E}(X_1)) \leq \frac{C}{2^k}$ pour tout $k \geq 1$.
c) En déduire que $(T_n)_{n \geq 1}$ tend presque sûrement vers $+\infty$.
d) Montrer que $\mathbf{V}(T_n) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\frac{1}{S_i^2}\right)$ pour tout $n \geq 1$.

355. On pose $(X)_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(X)_n = X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

- a)** Montrer que $((X)_n)_{n \geq 0}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on décompose $X^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}(X)_n$. Déterminer $a_{k,0}$ et $a_{k,n}$ pour $n \geq k$.
c) En considérant une variable aléatoire Z suivant la loi de Poisson de paramètre 1, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n} = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^k}{i!}$.
d) Pour $0 \leq n \leq k$, on note $b_{k,n}$ le nombre de façons de ranger k objets indifférenciés dans n tiroirs non numérotés, aucun des tiroirs n'étant vide. Montrer que $b_{k,n} = a_{k,n}$.
e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de façons de partitionner un ensemble à k éléments.

356. [MPI] On cherche à prouver l'existence d'un réel $C > 0$ tel que, pour toutes variables aléatoires réelles X et Y indépendantes et de même loi, on ait l'inégalité $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 2) \leq C \mathbf{P}(|X - Y| \leq 1)$.

- a)** On suppose X et Y à valeurs dans \mathbb{Z} . Montrer l'existence de $C' > 0$ indépendant de X et Y tel que $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 2) \leq C' \mathbf{P}(X = Y)$.
b) Montrer le résultat souhaité.
c) Montrer que $C' \geq 3$.

357. [MPI] a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2 de même loi telles que $Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{B}(n, p)$?

b) On dit qu'une variable aléatoire Z est infiniment divisible si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires i.i.d. Y_1, \dots, Y_k telles que $Y_1 + \dots + Y_k \sim Z$, avec a priori (Y_1, \dots, Y_k) défini sur un espace probabilisé différent de celui de Z .

Donner un exemple d'une telle variable aléatoire.

- c)** Que dire d'une variable aléatoire Z infiniment divisible de support inclus dans $[0, 1]$?
d) Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ indépendante des X_i (avec $\lambda > 0$). Montrer que $Z = X_1 + \dots + X_N$ est une variable aléatoire infiniment divisible.

358. Soient $a \in]0, 1[$ et $\varphi_a : x \mapsto 1 - (1 - x)^a$.

- a)** Montrer qu'il existe une variable aléatoire X_a à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\varphi_a(x) = \mathbf{E}(x^{X_a})$.

b) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) = \frac{a}{n}$. On pose $Y = \inf \{n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{1}_{A_n} = 1\}$. Montrer que $Y \sim X_a$.

On considère l'équation fonctionnelle : $\forall x \in [0, 1], \varphi_a(x) = x \varphi(\varphi_a(x))$ d'inconnue $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

c) Montrer que, pour $a \in [1/2, 1[$ cette équation admet une unique solution continue, qui est de plus la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

d) Montrer que ce n'est pas le cas pour $a = 1/3$.

359. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ et $\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la limite de $\left(\mathbf{E}\left(e^{-\lambda \frac{S_n}{n}}\right)\right)_{n \geq 1}$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ dérivable sur $]1, +\infty[$ et telle que : $\forall x > 1, f(x-1) + x f'(x) = 0$ et $\forall x \in]0, 1], f(x) = 1$.

Montrer qu'il existe une unique fonction f qui respecte ces conditions, qu'elle est strictement positive sur \mathbb{R}^+ et tend vers 0 en $+\infty$.

c) On définit $\phi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$, avec f la fonction de la question précédente. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda \frac{S_n}{n}}\right) = e^{-k} \phi(\lambda)$.

360. ★★ Soient X une variable aléatoire à support fini à valeurs dans \mathbb{Z}^2 et telle que $-X \sim X$, $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(\|S_n\|^2) = n \mathbf{E}(\|X\|^2)$ et $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{P}(S_n = x)^2$.

b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(S_{2n} = 0) \geq \frac{c}{n}$.

c) Démontrer que $\mathbf{P}(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1$.