

Mines - Ponts – MP

Algèbre

458. Pour $n \geq 2$, on pose $f(n) = \prod_{\substack{d \in [1, n-1] \\ d|n}} d$. Résoudre l'équation $f(n) = n$.

459. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ dont on note $\{d_1, \dots, d_k\}$ l'ensemble des diviseurs positifs. Montrer que :

$$\sqrt{n} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d_i \leq \frac{n+1}{2}.$$

460. Soient p, q deux entiers naturels premiers entre eux tels que $p < q$. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ et une liste strictement croissante $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ telle que

$$\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{a_k} \text{ et } a_1 \leq \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor.$$

461. a) Soit p premier impair. Pour $k \in [1, p-1]$ montrer qu'il existe un unique $k^{-1} \in$

$[1, p-1]$ tel que $k \cdot k^{-1} \equiv 1 [p]$. Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} \equiv 0 [p]$.

b) Soit m un entier naturel impair. Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} k^m \equiv 0 [p]$.

c) Ici, $p \geq 5$. Montrer que pour $k \in [1, p-1]$, il existe un unique $k^* \in [1, p^2-1]$ tel que $k \cdot k^* \equiv 1 [p^2]$. Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} k^* \equiv 0 [p^2]$.

462. On note $\tau(n)$ (resp. $\sigma(n)$) le nombre de diviseurs positifs de n (resp. la somme des diviseurs positifs de n).

a) Montrer que si $n \wedge m = 1$ alors $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$.

b) Montrer que si $\sigma(n)$ est premier alors $\tau(n)$ l'est aussi.

463. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = 2^n - 1$, $u = 2 + \sqrt{3}$, $v = 2 - \sqrt{3}$ et $s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$.

a) Montrer que, si M_n est premier, alors n l'est aussi.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n^2 - 2$. Qu'en déduire sur la suite (s_n) ?

c) Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $B = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ et, pour $(x, y), (x', y') \in B$, on pose $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $(x, y) \times (x', y') = (xx' + 3yy', xy' + yx')$.

i) Montrer que $(B, +, \times)$ est un anneau commutatif.

ii) On pose $A = \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$ et $\pi : a + \sqrt{3}b \in A \mapsto (\bar{a}, \bar{b}) \in B$.

Montrer que π est bien défini et est un morphisme surjectif d'anneaux.

d) Soit n un nombre premier. Montrer que, si M_n divise s_{n-2} , alors M_n est premier.

Ind. On pourra raisonner par l'absurde en considérant le plus petit diviseur premier q de M_n et l'ordre de $(\bar{2}, \bar{1})$ dans B^\times .

464. Soient A un anneau commutatif intègre et a_0, a_1, \dots, a_n dans A . Montrer que, si $a_n \neq 0$, l'équation $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$ admet au plus n solutions dans A .

465. Soient m et n dans \mathbb{N}^* . Déterminer les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

466. Soient p un nombre premier, et G un groupe fini d'ordre $2p$. Montrer que G possède un élément d'ordre p .

467. On note \mathcal{S}_n le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et M_n le maximum des ordres des éléments de \mathcal{S}_n .

a) Montrer que $n \leq M_n \leq n!$.

b) Si $n \geq 4$, montrer que $M_n \leq \max_{2 \leq k \leq n-1} (k M_{n-k})$.

c) Montrer que $M_n = O(3^{n/3})$.

468. Soit G un groupe fini dont tous les éléments sauf le neutre sont d'ordre 2.

a) Montrer que G est abélien.

b) Soient H un sous-groupe de G et $y \in G \setminus H$. Montrer que $H \cup yH$ est un sous-groupe de G , et que l'union est disjointe.

c) En déduire que $|G|$ est une puissance de 2.

d) Calculer le produit de tous les éléments de G .

469. Soit G un groupe abélien fini dont l'ensemble des automorphismes est de cardinal 3.

a) Montrer que $\varphi : x \in G \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G , puis que $\forall x \in G, x^2 = e$.

b) Montrer que G admet un sous-groupe V d'ordre 4 et déterminer les automorphismes de V .

c) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que G soit isomorphe à $V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$, et en déduire une absurdité.

470. Soient G un groupe abélien fini et \widehat{G} l'ensemble des morphismes de groupes de G dans (\mathbb{C}^*, \times) .

a) Montrer que \widehat{G} est un groupe fini.

b) Soit $\varphi \in \widehat{G}$ non trivial. Montrer que $\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0$.

c) Montrer que \widehat{G} est une partie libre de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$.

d) En déduire que $|\widehat{G}| \leq |G|$.

471. Soient \mathbb{K} un corps, A, B deux parties finies de \mathbb{K} . On note $m = \text{card}(A)$ et $n = \text{card}(B)$. On pose $C = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$.

a) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que $\text{Card}(C) \geq m + n - 1$.

b) Montrer le même résultat pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On pourra utiliser l'ordre lexicographique sur \mathbb{C} . Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est premier, on veut montrer que $\text{card}(C) \geq \min(p, m + n - 1)$. On suppose par l'absurde que $\text{card}(C) = m + n - q$ avec $q \geq 2$ et $m + n - q < p$.

c) Montrer qu'il existe $f : A \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ telles que :

(i) $\forall k \in \{0, \dots, m-2\}, \sum_{a \in A} f(a) a^k = 0$, (ii) $\sum_{a \in A} f(a) a^{m-1} = 1$,

(iii) $\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n+1-q\}, \sum_{b \in B} g(b) b^k = 0,$ (iv) $\sum_{b \in B} g(b) b^{n+1-q} = 1.$

d) Conclure en calculant de deux manières différentes la quantité :

$$Q = \sum_{(a,b) \in A \times B} f(a)g(b) \prod_{c \in C} (a + b - c).$$

472. Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A . On dit que I est un *idéal premier* si I est distinct de A et si, pour tout $(x, y) \in I^2$, la condition $xy \in I$ implique $x \in I$ ou $y \in I$.

a) Déterminer les idéaux premiers de \mathbb{Z} .

b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. Montrer que $P\mathbb{K}[X]$ est un idéal premier de $\mathbb{K}[X]$.

c) Soient J et K deux idéaux et I un idéal premier. Montrer que : $J \cap K = I$ implique $J = I$ ou $K = I$.

d) Soit A un anneau commutatif non trivial dont tous les idéaux distincts de A sont premiers. Montrer que A est intègre puis que A est un corps.

473. Soit I un idéal d'un anneau commutatif A .

On appelle *radical* de I l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in A ; \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$.

a) Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A contenant I .

b) Déterminer les radicaux des idéaux de \mathbb{Z} .

474. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

a) Montrer que P est de la forme

$$P = \lambda \times \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{2a_i} \times \prod_{j=1}^q [(X - \lambda_j)^{n_j} (X - \overline{\lambda_j})^{n_j}],$$

avec $\lambda \geq 0$, les α_i dans \mathbb{R} et les λ_j dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

475. Soit \mathbb{D} désigne le disque unité ouvert de \mathbb{C} . Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P possède une racine $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z_0| < 1$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z)| = |Q(z)|$ et $\forall z \in \mathbb{D}, |P(z)| < |Q(z)|$.

476. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses racines complexes, distinctes ou non. Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $\prod_{k=1}^n (X - \lambda_k^q)$ est encore à coefficients entiers.

477. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, unitaire de degré $n \geq 2$, dont toutes les racines sont réelles et négatives. Montrer que $P'(0)P(1) \geq \frac{n^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}P(0)$.

478. Montrer qu'il existe un polynôme à coefficients entiers dont $\sin \frac{\pi}{180}$ est racine.

479. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}$.

a) Montrer que $\sin((2n+1)\theta) = (\sin \theta)^{2n+1} P_n(\cos^2(\theta)/\sin^2(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{\cos^2(k\pi/(2n+1))}{\sin^2(k\pi/(2n+1))} = \frac{n(2n-1)}{3}$.

c) Conclure que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

480. ★ On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que l'équation $(E_n) : \tan(y) = 2n \tan(y/2n)$ possède au moins $n-1$ solutions dans $]0, n\pi[$.

b) Expliciter deux polynômes A, B à coefficients réels tels que $\tan(2nt) = \frac{A(\tan t)}{B(\tan t)}$ pour tout réel t tel que $\tan t$ et $\tan(2nt)$ soient définis.

c) Mettre en évidence un polynôme P tel que les solutions de (E_n) soient les solutions de $P(1/\tan^2(y/2n)) = 0$.

d) Dénombrer les solutions de (E_n) dans $]0, n\pi[$.

481. a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $P_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}$.

b) Déterminer les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.

482. Pour une partie finie $I = \{x_1, \dots, x_n\}$ (de cardinal n) d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E , on note

$$\text{Conv}(I) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k ; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}.$$

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\mathcal{Z}(P)$ l'ensemble de ses racines complexes. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

a) Écrire la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

b) Montrer que $\text{Conv}(\mathcal{Z}(P')) \subset \text{Conv}(\mathcal{Z}(P))$.

c) Soit H un demi-plan fermé de \mathbb{C} contenant au moins une racine de P' . Montrer que H contient au moins une racine de P . Démontrer ensuite que $P(H) = \mathbb{C}$.

483. Quelle est la dimension du \mathbb{Q} -sous-espace vectoriel de \mathbb{R} engendré par \mathbb{U}_5 ?

484. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$, on pose $\Lambda(x) = \text{pgcd}(x_1, \dots, x_n)$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants : **i)** $\Lambda(Ax) = \Lambda(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$; **ii)** $\det A = \pm 1$.

485. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.
- b) Trouver $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$ telle que $B^2 = A$.

486. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$. On suppose que $AB = P(A)$. Montrer que A est inversible puis que A et B commutent.

487. a) Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \phi(M) = \text{tr}(AM)$.

b) Déterminer les formes linéaires ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \phi(MN) = \phi(NM)$.

488. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{rg } M = 1$.

a) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}^n$ tels que $M = ab^T$.

b) Montrer que $M^2 = (\text{tr } M)I_n$.

c) Calculer χ_M . À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice $M + I_n$ est-elle inversible? Dans ce cas, expliciter son inverse.

489. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB = 0$ implique $BA = 0$.

490. Trouver les solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

491. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $M = (z^{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M soit inversible.

b) Calculer $\text{rg } M$ en fonction de z .

492. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $a_{n+1} = a_1$. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $m_{i,j} = a_j^i + a_{j+1}^i$.

a) Calculer $\det M$.

b) Étudier l'inversibilité de M .

493. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $n - 1$.

a) Calculer $\dim (\text{Ker } u^j)$ pour $1 \leq j \leq n - 1$.

b) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

494. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$, soient \mathcal{N} l'ensemble des matrices nilpotentes et \mathcal{H} celui des matrices de trace nulle.

- a) Montrer que $\text{Vect}(\mathcal{N}) \neq \mathcal{N}$.
 b) Montrer que $\text{Vect}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{H}$. A-t-on $\mathcal{H} = \text{Vect}(\mathcal{N})$?

495. Soient A et B dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que l'ensemble des matrices de $\{tA + (1-t)B, t \in [0, 1]\}$ n'appartenant pas à $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est fini de cardinal au plus n .

496. a) Que peut-on dire du déterminant d'une matrice de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$, le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$?

b) Soient $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $B + kC \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Calculer $|\det B|$ et $\det C$.

497. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $kM^{k+1} = (k+1)M^k$. Montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

498. a) Définir la fonction indicatrice d'Euler puis exprimer $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition primaire de $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

c) En déduire le déterminant de la matrice $(i \wedge j)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

499. Montrer que : $\forall t \geq 0, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A^2 + tI_n) \geq 0$.

500. a) Soient P_0, \dots, P_{n-1} des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec P_k de degré k et z_0, \dots, z_{n-1} des nombres complexes. Calculer $\det(P_{i-1}(z_{j-1}))_{1 \leq i, j \leq n}$.

b) Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\prod_{0 \leq i < j \leq n} \frac{x_j - x_i}{j - i} \in \mathbb{Z}$.

501. Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ des réels et $M = (e^{a_i b_j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

a) Montrer que $\det M > 0$ lorsque $n = 2$.

b) Calculer $\det M$ lorsque $b_k = k - 1$ pour tout k .

c) Montrer que M est inversible puis que $\det M > 0$.

502. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : $\sum_{i \neq j} (A_i A_j + A_j A_i) = 0$. Montrer que :

$$\det \left(\sum_{k=1}^n (A_k + I_n)^2 - (n-2)I_n \right) \geq 0.$$

503. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont tous les coefficients diagonaux sont impairs et les autres pairs. Montrer que A est inversible.

b) Est-ce encore le cas si on suppose les coefficients diagonaux pairs et les autres impairs ?

c) On dispose de $2p + 1$ masses telles que, dès qu'on en enlève une, les $2p$ masses restantes peuvent être regroupées en deux ensembles de cardinal p de même masse. Montrer que les $2p + 1$ masses sont toutes égales.

504. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, où \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{C} . Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $(\star) f \circ g - g \circ f = \text{id}$.

a) Vérifier que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $f \circ P(g) - P(g) \circ f = P'(g)$ et montrer que $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

b) Pour $E = \mathbb{R}[X]$, donner un exemple qui vérifie (\star) .

505. Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente telles que $AN = NA$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A + N$.

506. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $A^{k+1}B^k = A$ et que A et B sont équivalentes.

a) Montrer que $\dim \text{Ker } A = \dim \text{Ker } A^2$.

b) Montrer que $\mathbb{K}^n = \text{Ker } A \oplus \text{Im } A$.

c) Montrer que $B^{k+1}A^k = B$.

507. Soient \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Montrer que $\text{Com } A$ et $\text{Com } B$ sont semblables.

508. Soient $n \geq 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

a) Calculer $\text{Com}(J_r)$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $0 \leq r \leq n$.

b) Montrer que $\text{Com}(AB) = \text{Com}(A) \text{Com}(B)$ pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

c) Exprimer $\text{rg}(\text{Com}(A))$ en fonction de $\text{rg } A$.

d) Étudier l'injectivité de $\gamma : A \mapsto \text{Com}(A)$. Quelle est son image ?

509. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Soient $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$. On suppose que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$.

a) Montrer que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{rg } p_i = 1$.

b) Montrer que la somme $\text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_n$ est directe.

510. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que : $\text{rg } A = \text{rg } A^2 \iff \mathbb{R}^n = \text{Im } A \oplus \text{Ker } A$.

b) Montrer que $\text{rg } A = \text{rg } A^2$ si et seulement si $t(A + tI_n)^{-1}$ possède une limite finie quand t tend vers 0^+ .

511. Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note V^o l'ensemble des M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall A \in V, \text{tr}(AM) = 0$; l'ensemble V^o est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Exprimer la dimension de V^o en fonction de celle de V .

b) Déterminer V^o si V est le sous-espace des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

512. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ tel que $V \setminus \{0\} \subset \text{GL}_n(\mathbb{Q})$.

a) Montrer que $\dim V \leq n$.

b) On note S la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ définie par $s_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1 \\ 2 & \text{si } i = 1 \text{ et } j = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{Z}$ tels que λ_0 soit impair. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k S^k \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$.

c) En déduire que dans la question a) l'égalité est possible.

513. Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ telle que les seuls sous-espaces stables par tous les éléments de \mathcal{A} soient $\{0\}$ et E .

a) Soit $x \in E$. Donner $\Gamma_x = \{f(x), f \in \mathcal{A}\}$.

b) i) Soient $u \in \mathcal{A}$ tel que $\text{rg}(u) = r \geq 1$ et $f \in \mathcal{A}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\text{rg}(u \circ f \circ u - \alpha u) < r$.

ii) En déduire qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $\text{rg}(u) = 1$.

c) Montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

514. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\text{Im } u^2 = \text{Ker } u^3$. Montrer que : $\text{Im } u = \text{Ker } u^4$.

515. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $S(A)$ sa classe de similitude. On suppose $S(A)$ bornée.

a) Montrer que A est diagonale à l'aide des matrices de dilatation $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que toute matrice de $S(A)$ est diagonale.

b) À l'aide des matrices de transvection $I_n + E_{i,j}$ où $i \neq j$, montrer que $A \in \mathbb{C}I_n$.

516. Soit \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} .

a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A, B et $A + B$ sont nilpotentes. Montrer : $\text{tr}(AB) = 0$.

b) Soit (A_1, \dots, A_r) une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\Phi : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto ((\text{tr}(A_1 B), \dots, \text{tr}(A_r B))) \in \mathbb{K}^r$. Montrer que Φ est surjective.

c) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué de matrices nilpotentes.

i) Exprimer la dimension de $G^\circ = \{B \in G; \forall A \in G, \text{tr}(AB) = 0\}$ en fonction de celle de G .

ii) Montrer que $\dim G \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

517. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit \mathcal{D} l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $m_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i - j$ est impair.

a) Montrer que \mathcal{D} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\text{Com}(M) \in \mathcal{D}$.

c) L'équivalence précédente reste-t-elle vraie si on ne suppose plus M inversible ?

518. * Déterminer les applications f de \mathbb{R}^n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et toute $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on ait $f(PX) = Pf(X)P^{-1}$.

519. Soient $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On suppose que, pour toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, la matrice $f(A)$ appartient à $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

i) Montrer que A est équivalente à une matrice nilpotente.

ii) En déduire que $f(A) \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

b) Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

520. Soit \mathcal{D}_n le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices diagonales inversibles. Déterminer les $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall M \in \mathcal{D}_n, PMP^{-1} \in \mathcal{D}_n$.

521. Soit φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = \frac{1}{2}(P(X) + P(-X)) + \frac{X}{2}(P(X) - P(-X))$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker} \varphi = \{(1 - X)P, P \in \mathbb{R}[X] \text{ impair}\}$ et $\mathrm{Im} \varphi = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ pair}\}$.
b) Montrer que $\mathrm{Im} \varphi$ et $\mathrm{Ker} \varphi$ sont supplémentaires. Que dire de φ ?

522. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer la comatrice de la comatrice de M .

523. Rappeler la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables.

524. Soient $n, d \geq 2$ des entiers fixés. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $m_{i,i} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$;

ii) sur chaque ligne, M a exactement d coefficients égaux à 1 et $n - d$ coefficients nuls ;

iii) pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$:

– si $m_{i,j} = 0$ alors il existe un unique $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $m_{i,k} = m_{k,j} = 1$,

– si $m_{i,j} = 1$ alors il n'existe aucun $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $m_{i,k} = m_{k,j} = 1$.

a) Déterminer le spectre de J .

b) Exprimer MJ, JM et M^2 en fonction de M, J et I_n .

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(M - dI_n) = \mathrm{Im} J$. Que peut-on en déduire concernant le couple (n, d) ?

d) Montrer que les autres valeurs propres de M sont racines d'un polynôme du second degré à préciser.

525. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ et $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \in [0, 1]$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de A puis que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| \leq 1$.

b) On suppose que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} > 0$.

Montrer que 1 est la seule valeur propre complexe de A de module 1.

c) On revient au cas général et l'on suppose que λ est une valeur propre complexe de A de module 1. Montrer que : $\lambda^{n!} = 1$.

526. Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $C = AB - BA$ et C commute avec A et B . Montrer que $C = 0$.

527. Soient $n \geq 2$ et f un endomorphisme de \mathbb{C}^n de rang 2.

a) Exprimer χ_f en fonction de $\mathrm{tr} f$ et $\mathrm{tr} f^2$.

b) Déterminer en fonction de $\mathrm{tr} f$ et $\mathrm{tr} f^2$ si f est diagonalisable.

528. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T M A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Soient (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) deux familles de \mathbb{R}^n . Montrer que (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) sont deux bases de \mathbb{R}^n si et seulement si $(X_i Y_j^T)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que A est inversible si et seulement si f_A est bijective.

- c) On suppose que A est diagonalisable. Montrer que f_A est diagonalisable.
 d) Soient λ une valeur propre non nulle de A^T et Y un vecteur propre associé. Montrer que :
 $F = \{XY^T, X \in \mathbb{R}^n\}$ est un sous-espace stable par f_A .

529. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

- a) Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \text{sp}(M)$.
 b) Montrer que M est diagonalisable.
 c) Déterminer les M dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $M^2 + M^T = I_n$.

530. Soient $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = J$. Montrer que $\text{tr}(A)^3 = \text{tr}(J)$.

531. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'ensemble $I = \{P \in \mathbb{C}[X], P(M) \text{ nilpotente}\}$.

532. Soient $n \geq 2$, $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec B scindé à racines simples de degré $n + 1$, et f l'application qui à P associe le reste de la division euclidienne de AP par B . Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelles sont ses valeurs propres ? f est-il diagonalisable ?

533. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

- i) A et B ont une valeur propre commune ;
 ii) il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AC = CB$.

534. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\text{Tr}(A^n) \neq 0$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Tr}(A^k) = 0$. Montrer que A est diagonalisable.

535. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, soit $T(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 \min(x, t)f(t)dt$.
 Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer les éléments propres de T .

536. On identifie éléments de $\mathbb{R}[X]$ et fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

a) Montrer que $u : P \mapsto \left[x \mapsto \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt \right]$ constitue un endomorphisme de E .

b) Montrer que $u(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

- c) Déterminer les éléments propres de u .
 d) Caractériser les endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ qui commutent avec u .

537. On pose $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \det(M) = 1\}$.

- a) Vérifier que c'est un groupe.
 b) Quels sont les ordres finis possibles d'une matrice de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$?
 c) Existe-t-il une matrice de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre infini ?

538. On identifie ici les polynômes à coefficients dans \mathbb{C} avec leur fonction polynomiale

associée. Soit u qui à $P \in \mathbb{C}[X]$ associe $u(P) : z \mapsto e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n$.

- a) Montrer que u est bien définie et que $u(P) \in \mathbb{C}[X]$.
 b) Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$. Déterminer ses éléments propres.

539. Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun à u et v dans les cas suivants : $u \circ v = 0$, $u \circ v = \alpha u$ et $u \circ v = \alpha u + \beta v$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que u et v sont alors cotrigonalisables.

540. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB + BA = A$. Montrer que si n est impair alors A et B ont un vecteur propre commun. Que dire si n est pair ?

541. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que AB est diagonalisable.

- a) La matrice BA est-elle diagonalisable ?
 b) La matrice $(BA)^2$ est-elle diagonalisable ?

542. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On pose :

– $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA\}$,

– $\mathcal{C}'(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \forall C \in \mathcal{C}(A), CB = BC\}$.

- a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déterminer la dimension. À quelle condition a-t-on $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}[A]$?
 b) Montrer que $\mathcal{C}'(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déterminer la dimension. Montrer que $\mathcal{C}'(A) = \mathbb{R}[A]$.

543. Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On écrit $\chi_u = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.

- a) Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker}(u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k}$.
 b) On suppose u nilpotent d'indice n .

i) Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

- ii) Montrer que les sous-espaces vectoriels de E stables par u sont en nombre fini.
 c) On suppose que u est nilpotent et qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E stables par u . Montrer que u est nilpotent d'indice n .

544. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{1,i} = m_{n,i} = m_{i,n-i+1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n$, les autres coefficients étant nuls. Calculer χ_{M^2} . Est-ce que M^2 est diagonalisable ?

545. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\chi_A(X^2) = \chi_A(X)\chi_A(X - 1)$. Montrer que n est pair.

546. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

547. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

a) Étudier la diagonalisabilité de B .

b) Étudier le rang de $B - I_{2n}$.

548. Soit $n \geq 2$. On pose : $E_1 = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; (I_n, B, \dots, B^{n-1}) \text{ libre}\}$ et $E_2 = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \exists X \in \mathbb{R}^n, (X, BX, \dots, B^{n-1}X) \text{ libre}\}$.

a) Montrer que $E_2 \subset E_1$.

b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$. On pose $I_X = \{Q \in \mathbb{R}[X] ; Q(A)X = 0\}$. Montrer qu'il existe $P_{A,X} \in \mathbb{R}[X]$ unitaire tel que $I_X = P_{A,X}\mathbb{R}[X]$.

c) Montrer que : $\mathbb{R}^n = \bigcup_{X \in \mathbb{R}^n} \text{Ker } P_{A,X}(A)$.

d) Montrer qu'il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ finie telle que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{X \in U} \text{Ker } P_{A,X}(A)$.

e) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et ϕ_1, \dots, ϕ_p des formes linéaires sur \mathbb{R}^n telles que : $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^p \text{Ker } \phi_i$.

Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\phi_i = 0$.

f) Montrer que $E_1 \subset E_2$.

549. Soit H un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments ont un spectre inclus dans $\{-1, 1\}$.

a) Montrer que H est commutatif.

b) Déterminer les valeurs possibles du cardinal de H .

550. Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $x \in E$, on note : $I_x = \{P \in \mathbb{C}[X], P(u)(x) = 0\}$ et $E_x = \{P(u)(x), P \in \mathbb{C}[X]\}$.

a) Montrer que I_x est un idéal non nul de $\mathbb{C}[X]$. On note μ_x le polynôme unitaire qui l'engendre.

b) Soient $x, y \in E$ tels que $\mu_x \wedge \mu_y = 1$. Montrer que $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$, puis que $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$.

c) Soit π_u le polynôme minimal de u . Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \pi_u$.

551. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\pi_u = X^2 + aX + b$. On suppose π_u non scindé sur \mathbb{R} .

a) Soient $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $P_x = \text{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u .

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et $x \in E \setminus F$. Montrer que $P_x \cap F = \{0\}$.

c) Démontrer l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant tous identiques, de taille 2×2 , et de polynôme minimal π_u .

552. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On pose $G_A = \{c \in \mathbb{C}^*, cA \text{ est semblable à } A\}$.

a) Montrer que G_A est un sous-groupe de \mathbb{C}^* .

b) Montrer que G_A est infini si et seulement si A est nilpotente, et qu'alors $G_A = \mathbb{C}^*$.

553. a) Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = \lambda BA$.

b) Déterminer, parmi les λ trouvés en **a)**, ceux pour lesquels toutes les matrices A, B vérifiant cette condition sont diagonalisables.

554. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On s'intéresse aux endomorphismes u de E dont les seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$ et E .

a) Déterminer ces endomorphismes dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ puis dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

b) Dans le cas général caractériser ces endomorphismes à l'aide de leur polynôme caractéristique.

555. Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

a) On suppose que f a un plan vectoriel stable F . Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $F \subset \text{Ker } P(f)$.

b) On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\dim \text{Ker } P(f) \geq 2$. Montrer que $\text{Ker } P(f)$ contient un plan vectoriel stable par f .

556. ★★ Soient \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} , E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) On suppose que u est nilpotent d'indice p .

i) Montrer que $p = n$ si et seulement si $\dim \text{Ker } u = 1$.

ii) Montrer que $p = n$ si et seulement si u possède un nombre fini de sous-espaces stables.

b) On revient au cas général. Montrer que u possède un nombre fini de sous-espaces stables si et seulement si $\deg \pi_u = n$.

557. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que la fonction polynomiale associée est injective sur \mathbb{R} . Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables vérifiant $P(A) = P(B)$. Montrer que $A = B$.

558. a) Montrer que deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.

b) Même question, avec un nombre quelconque de matrices.

c) Soit G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in G, A^2 = I_n$. Montrer que G est fini et donner une majoration de son cardinal.

d) Soit $n \neq m$. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\text{GL}_m(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.

e) On considère G comme dans la question **c)**. Montrer que $\text{card } G$ est une puissance de 2.

f) Trouver tous les groupes multiplicatifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui ne sont pas des sous-groupes de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. On précise qu'un groupe multiplicatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un sous-ensemble stable par produit matriciel et formant un groupe pour la loi induite par le produit matriciel.

559. Soient $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), \Phi_{A,B}(M) = AM - MB$.

a) Montrer que, si A et B n'ont pas de valeur propre commune, $\Phi_{A,B}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

b) Supposons que λ soit une valeur propre commune à A et B . Montrer que le noyau de $\Phi_{A,B}$ contient une matrice de rang 1.

560. Soit $E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^3 = A\}$. Montrer que E est réunion d'un nombre fini de classes de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

561. Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe une base e telle que la matrice M de u dans la base e vérifie $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies |m_{i,j}| \leq \alpha$.

562. Soient $n \geq 2$ et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = I_n$ pour tout $A \in G$.

a) Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables.

b) Soit $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $\mathrm{Vect}(G)$ constituée d'éléments de G . Soit $f : A \in G \mapsto (\mathrm{tr}(AM_1), \dots, \mathrm{tr}(AM_n))$.

Soient $A, B \in G$ telles que $f(A) = f(B)$. On pose $C = AB^{-1}$.

i) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{tr}(C^k) = n$.

ii) En déduire que $C - I_n$ est nilpotente.

c) Montrer que G est fini.

563. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $\chi_A = \chi_B$ si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$.

564. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_3$. Montrer que la suite $(A^k)_{k \geq 0}$ converge vers une matrice que l'on précisera.

565. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Exprimer le polynôme minimal de A^{-1} en fonction du polynôme minimal de A .

566. ★★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que, pour $r \in \mathbb{R}^{+*}$ assez grand, $(re^{it}I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{r^{k+1}e^{i(k+1)t}}$.

b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout $r > 0$ assez grand,

$$P(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{it} P(re^{it})(re^{it}I_n - A)^{-1} dt.$$

c) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

567. Soient U l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U^{++} l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à spectre inclus dans \mathbb{R}^{+*} . Soit $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, U^{++})$ telle que $t \mapsto A(t)^2$ est constante.

a) Montrer que A est constante.

b) Le résultat subsiste-t-il si $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, U)$?

c) Le résultat subsiste-t-il si A n'est pas de classe \mathcal{C}^1 ?

d) Le résultat subsiste-t-il si A est valeurs dans l'ensemble des matrices trigonalisables à spectre inclus dans \mathbb{R}^{+*} ?

568. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, X une partie de E . Montrer que X est finie si et seulement si $\{\langle x, y \rangle, (x, y) \in X^2\}$ est fini.

569. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien non réduit à $\{0\}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

- a) Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
 b) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale nulle.

570. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3. Soient $f, g \in \text{SO}(E)$.

- a) On suppose qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = g(x) = x$. Montrer que f et g commutent.
 b) On suppose que f et g commutent. Montrer que l'une des deux propositions suivantes est vraie :
 – il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = g(x) = x$,
 – f et g sont des symétries orthogonales par rapport à deux droites orthogonales entre elles.

571. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer l'équivalence entre : **i)** p est un projecteur orthogonal, **ii)** $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$, **iii)** p est symétrique.

572. On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n \geq p$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\text{rg}(A) = p$.

- a) Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^p \mapsto \|Ax - b\|_2$ admet un minimum sur \mathbb{R}^p atteint en un unique $x_0 \in \mathbb{R}^p$.
 b) Montrer que x_0 est l'unique solution de $A^T Ax = A^T b$.

573. Montrer l'existence et calculer $\min_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} \sum_{i=0}^n (i^n - P(i))^2$.

574. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne usuelle.

- a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ quels que soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi qu'une suite $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ à termes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et telle que $\|I_n - AM_0\| < 1$ et $\forall p \in \mathbb{N}, M_{p+1} = 2M_p - M_p A M_p$. Montrer que A est inversible et que $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers A^{-1} .
 c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \|I_n - AM\|$ admet un minimum, et le calculer en fonction de A .

575. a) Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

a) **i)** Montrer qu'il existe une unique suite (T_n) de polynômes réels telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

ii) Déterminer degré et coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.

c) On note $U_n[X]$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré $n \in \mathbb{N}$ de $\mathbb{R}[X]$.

Calculer $\min_{P \in U_n[X]} \int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

d) Que dire de la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$?

576. Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} \right| \leq n \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}| \leq n^{3/2}$.

577. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

On dispose de deux produits scalaires ϕ et ψ sur E , et on suppose qu'ils sont tels que $\mathcal{O}((E, \psi)) \subset \mathcal{O}((E, \phi))$, où \mathcal{O} désigne l'ensemble des isométries vectorielles de l'espace euclidien considéré. Montrer que $\mathcal{O}((E, \psi)) = \mathcal{O}((E, \phi))$.

578. Soit E un espace euclidien. Montrer que deux produits scalaires sur E qui ont le même groupe orthogonal sont proportionnels.

579. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $V_n = \text{Vect SO}_n(\mathbb{R})$.

a) Expliciter V_2 .

b) On suppose désormais $n \geq 3$. Montrer que : $\exp \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \text{SO}_n(\mathbb{R})$ et $V_n^\perp \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.

c) Montrer que $V_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

580. a) On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n stable par A . Montrer que F^\perp est stable par A^T .

b) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AA^T = A^T A$. Montrer que A est diagonalisable ou semblable

à une matrice de la forme :
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\eta \\ 0 & \eta & \alpha \end{pmatrix}.$$

581. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + A) \geq 1$.

582. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^T = A^2$. Trouver un polynôme annulateur de A .

b) Caractériser les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^T = A^2$.

583. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$. Montrer que $\text{Im}(A + A^T) = \text{Im } A + \text{Im } A^T$.

584. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $u : S \mapsto MSM^T$ définit un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $2 \text{tr } u = \text{tr}(M^2) + (\text{tr}(M))^2$.

c) Montrer que u est un automorphisme si et seulement si M est inversible.

585. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulles, la matrice N étant nilpotente d'indice n .

a) Montrer que $\text{rg } N = n - 1$.

b) On suppose que $MN^T = N^T M = NM^T$. Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Im } M \overset{\perp}{\oplus} \text{Im } N$.

c) Étudier la réciproque de *b)*.

586. a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

i) $x^T A x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, *ii)* $\text{Sp } A \subset \mathbb{R}^+$.

b) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

c) Montrer que, pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$, puis déterminer $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^T A = S\}$.

587. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ sont nuls pour toute matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de A est pair.

588. On pose $\sigma(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$ pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Calculer $\sigma(\Omega)$ pour $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\sigma(\Omega^T A \Omega) = \sigma(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- Calculer $\sigma(A)$ lorsque A représente une projection orthogonale dans une base orthonormée.
- Déterminer les matrices $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \sigma(P^{-1}AP) = \sigma(A)$.

589. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*, S \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$. On pose $A = (\text{Tr}(S^{i+j-2}))_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que $\text{rg}(A) = \min(n, \deg(\pi_S))$, où l'on a noté π_S le polynôme minimal de S .

590. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

- Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.
- Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = h^2$.
- Soient $f, g \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que $\text{Ker}(f+g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$. Que dire de $\text{Im}(f+g)$?

591. Soit $C : A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n - A)^{-1}(I_n + A) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que C est bien définie.
- Étudier l'inversibilité de $I_n + C(A)$. Montrer que C est injective. L'application C est-elle surjective? Dans le cas contraire, donner son image.

592. Soit G un sous-groupe borné de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $G \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{I_n\}$.

593. On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Une fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe si $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, A \neq B \Rightarrow (\forall t \in]0, 1[, f((1-t)A + tB) < (1-t)f(A) + tf(B))$. Montrer que la fonction $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est convexe sur \mathbb{R}^n . Étudier sa stricte convexité.

594. ★ Déterminer les applications f de \mathbb{R}^n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et toute $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on ait $f(PX) = Pf(X)P^{-1}$.

595. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le nombre de matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = B^2$.

596. Montrer que si $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors $\text{Com}(M) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

597. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

- Montrer que $a_{i,i} > 0$ pour $1 \leq i \leq n$, puis que $a_{i,j}^2 \leq a_{i,i}a_{j,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$.
- Montrer que $\max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| = \max_{1 \leq k \leq n} a_{k,k}$.
- Que dire de la matrice $A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{pmatrix}$ pour $1 \leq i < j \leq n$?

598. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si un intervalle I de \mathbb{R} contient toutes les valeurs propres de A et B , alors I contient également les valeurs propres de $(1-t)A + tB$ pour tout $t \in [0, 1]$.

599. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_i la matrice extraite des i premières lignes et colonnes de A . Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A_i) > 0$.

600. Montrer que le spectre de $A = \left(\frac{1}{i+j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est inclus dans \mathbb{R}^{+*} .

601. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $S = \left(\alpha^{|i-j|} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

a) Calculer $\det(S_n)$.

b) À quelle condition a-t-on $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?

602. ★★ a) Soient $U, V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $U = R^2$ et en déduire $\text{tr}(UV) \geq 0$.

b) Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que : $\alpha : t \mapsto \text{tr} P(f(t))$ est dérivable et calculer α' .

c) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que : $\text{tr}(e^A) \leq \text{tr}(e^B)$.

603. Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

b) Calculer $\sup\{\text{tr}(AM), A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$.

604. Soient E un espace euclidien de dimension $n > 0$ et $u \in \mathcal{S}(E)$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u et, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note \mathcal{G}_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k . On note enfin S la sphère unité de E .

a) Pour un sous-espace vectoriel non nul V de E , montrer que $x \in V \cap S \mapsto \langle x, u(x) \rangle$ possède un maximum et un minimum.

b) Montrer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les identités

$$\lambda_k = \min_{V \in \mathcal{G}_k} \max_{x \in V \cap S} \langle x, u(x) \rangle = \max_{V \in \mathcal{G}_{n+1-k}} \min_{x \in V \cap S} \langle x, u(x) \rangle.$$

Analyse

605. Donner un exemple de forme linéaire discontinue sur un espace normé.

606. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$.

Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

a) Montrer que N est une norme sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E .

b) Soit $f \in E$. On pose $g = f + 2f' + f''$. Exprimer f en fonction de g .

c) Montrer qu'il existe $a > 0$ telle que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq aN(f)$.

d) Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

607. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \max\{|P'(x)|, x \in [-1, 1]\}$.

a) Justifier que N_a est une norme.

b) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

608. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)|$, $\|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)| dt$ et

$$N(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^1 t^n P(t) dt \right|.$$

- a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
 b) Comparer les normes N et $\|\cdot\|_\infty$.
 c) Comparer les normes N et $\|\cdot\|_1$.

609. Soit $Q \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\|P\|_Q = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)Q(t)|$.

- a) Montrer que $\|\cdot\|_Q$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
 b) On pose $Q_1 = 1$. Donner une condition suffisante sur Q pour que $\|\cdot\|_Q$ et $\|\cdot\|_{Q_1}$ soient équivalentes.
 c) On suppose que Q admet un zéro α dans $[-1, 1]$.
 i) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $P(\alpha) = 1$, $P'(\alpha) = 0$ et $\forall t \in [-1, 1] \setminus \{\alpha\}$, $0 \leq P(t) < 1$.
 ii) Montrer que $(t \mapsto P(t)^n Q(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.
 iii) Conclure que $\|\cdot\|_Q$ et $\|\cdot\|_{Q_1}$ ne sont pas équivalentes.

610. a) Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \|P^{-1}AP\| = \|A\|?$$

b) Même question en remplaçant $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ par $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

611. L'ensemble des polynômes scindés à racines simples et de degré n est-il un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$? Un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$? L'ensemble des polynômes scindés, à racines simples est-il un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$? Un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$?

612. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et S un segment de \mathbb{R} . On note $E = \mathcal{C}^0(S, \mathbb{R})$, que l'on munit de la norme infinie. On note \mathcal{Z}_p l'ensemble des éléments de E qui s'annulent en au moins p points.

- a) Montrer que \mathcal{Z}_1 est fermé dans E .
 b) Déterminer l'adhérence de \mathcal{Z}_p pour n'importe quel p dans \mathbb{N}^* .

613. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que la restriction de f à un cercle de rayon strictement positif n'est pas injective.

614. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose : } v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k.$$

- a) Simplifier $v_n \circ (u - \text{id})$.
 b) Montrer que $\text{Ker}(u - \text{id})$ et $\text{Im}(u - \text{id})$ sont en somme directe.
 c) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
 i) $\text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id}) = E$;
 ii) (v_n) converge simplement sur E et $\text{Im}(u - \text{id})$ est fermé dans E .

615. Soit K un convexe compact non vide d'un espace normé E .

a) Soit u un endomorphisme continu de E tel que $u(K) \subset K$. Montrer que $C = (\text{id} - u)(K)$ est convexe et compact. En utilisant la suite $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\text{id} - u)(u^k(x))$ montrer que u admet un point fixe.

b) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite d'endomorphismes continus de E qui stabilisent tous K et qui commutent. On note F_n l'ensemble des points de K fixes par u_1, \dots, u_n . Montrer que F_n est non vide pour tout n . En déduire qu'il existe un point fixe commun à tous les endomorphismes u_n .

616. Soient N_1, N_2 et N_3 des normes sur respectivement $\mathbb{R}_m[X], \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+m}[X]$.

a) Justifier que $N_4 : (P, Q) \mapsto N_1(P) + N_2(Q)$ est une norme sur $\mathbb{R}_m[X] \times \mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que $\inf_{\substack{P \in \mathbb{R}_m[X] \setminus \{0\} \\ Q \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}}} \frac{N_3(PQ)}{N_1(P)N_2(Q)} > 0$.

617. Soit \mathcal{B} l'espace des suites réelles bornées muni de la norme infinie.

a) Pour $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ on pose $u_X = (\mathbf{1}_X(n))_{n \geq 0}$. Montrer que $\varphi : X \mapsto u_X$ est une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

b) On suppose l'existence d'une partie dénombrable $A = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ de \mathcal{B} dense dans \mathcal{B} . Soient $b > 0$ et $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Justifier l'existence de $k_X = \min\{k \in \mathbb{N}, \|u_X - a_k\|_\infty \leq b\}$. Aboutir à une contradiction.

618. Soient n et p deux entiers naturels. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image directe par f de tout ouvert de \mathbb{R}^n est un ouvert de \mathbb{R}^p .

619. a) On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Les parties $A = \left\{ f \in E, \int_0^1 f = 1 \right\}$ et $B = \{f \in E, f([0, 1]) \subset [0, 1]\}$ sont-elles compactes ?

Si $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E , on dit que $f : K \rightarrow K$ est une isométrie si $\forall (x, y) \in K^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

b) Dans \mathbb{R} , quelles sont les isométries de $[0, 1]$?

c) Soit f une isométrie du compact K . Montrer que f est surjective.

d) Soient K un compact et $f : K \rightarrow K$ telle que : $\forall (x, y) \in K^2, \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$. Montrer que f est une isométrie.

620. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : E \rightarrow E$ vérifiant :

$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$. Montrer que f est constante.

621. Soient K un compact non vide et $f : K \rightarrow K$ une fonction continue telle que :

$\forall (x, y) \in K^2, \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$.

a) Montrer que f est bijective.

b) Montrer que f^{-1} est continue.

622. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension finie et $f : E \rightarrow E$ telle que, pour tous $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{4} (\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$. Montrer que f admet un unique point fixe.

623. On pose $E = C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \cap L^2$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_2$. Si $f \in E$, on pose $\phi(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f \text{ si } x > 0 \\ f(0) \text{ sinon.} \end{cases}$. Montrer que ϕ est un endomorphisme continu de E .

624. Soit C un fermé non vide de \mathbb{R}^n tel que : $\forall (x, y) \in C^2, x \neq y \Rightarrow]x, y[\cap C \neq \emptyset$. Montrer que C est convexe.

625. a) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et f une forme linéaire continue non nulle sur E . On fixe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

i) Montrer que $\|f\|_{\text{op}} = \frac{|f(x_0)|}{d(x_0, \text{Ker } f)}$.

ii) Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

– il existe $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$ et $\|f\|_{\text{op}} = |f(a)|$,

– il existe $y \in \text{Ker}(f)$ tel que $d(x_0, \text{Ker } f) = \|x_0 - y\|$.

b) On munit l'espace $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$, et on définit l'application

$\Phi : u \in E \mapsto \int_0^1 u(t)dt - \int_{-1}^0 u(t)dt$. Montrer que Φ est une forme linéaire continue, et calculer $\|\Phi\|_{\text{op}}$.

626. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S(A) = \{P^{-1}AP, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Q_k = \text{Diag}(k^n, k^{n-1}, \dots, k)$.

a) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_k^{-1} T Q_k$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est trigonalisable si et seulement si $\overline{S(A)}$ contient une matrice diagonale.

c) Montrer l'équivalence des énoncés suivants : **i)** A est nilpotente, **ii)** $S(A)$ contient une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle, **iii)** $0 \in \overline{S(A)}$.

627. On considère l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Cet ensemble est-il ouvert ? fermé ?

628. Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer l'intérieur, l'adhérence et les composantes connexes par arcs de l'ensemble des matrices de rang r de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

629. On munit \mathbb{C}^n de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour $r \in \mathbb{R}^+$ et G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, on dit que G vérifie $\mathcal{P}(r)$ si $\|AX - X\|_2 \leq r\|X\|_2$ pour tout $A \in G$ et tout $X \in \mathbb{C}^n$.

a) Pour quels r le groupe $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ vérifie-t-il $\mathcal{P}(r)$?

b) Soient G sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie $\mathcal{P}(r)$, $A \in G$ et $\lambda \in \text{sp}(A)$. Montrer que $|\lambda| = 1$ puis que $\text{Ker}(A - \lambda I_n)^2 = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$. En déduire que les éléments de G sont diagonalisables.

c) Montrer que si $r < \sqrt{2}$ alors le seul groupe qui vérifie $\mathcal{P}(r)$ est $\{I_n\}$.

630. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.

- a) Montrer que P_n n'a pas de racine réelle si n est pair, et a une unique racine réelle sinon.
 b) On note x_n la racine réelle de P_{2n+1} . Montrer que $(x_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.

631. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b > a \geq 1$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\sum_{k=an+1}^{bn} \ln \left(1 - \frac{k}{n^2} \right).$$

632. Déterminer la limite de la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{n+k}{2 + \sin(n+k) + (n+k)^2}$.

633. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \left(\cos \left(\frac{n\pi}{3n+1} \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{6n+1} \right) \right)^n$. Déterminer la limite de (u_n) .

634. On considère une suite réelle u vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+2}$.

- a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 1$.
 b) Montrer que u est décroissante à partir d'un certain rang, puis qu'elle est convergente, et déterminer sa limite.

635. Soit $\alpha \in]1, +\infty[$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\prod_{k=1}^n (kx + n^2) = \alpha n^{2n}$ possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n .

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < 2\alpha$.

c) Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

636. On note, pour $j \in \mathbb{N}^*$, $k_j = \min \left\{ n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq j \right\}$.

a) Montrer que k_j est bien défini.

b) Étudier la monotonie et la limite éventuelle de $(k_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$.

c) Montrer que $\frac{k_{j+1}}{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} e$.

637. Soit (a_n) une suite strictement monotone telle que $a_n \rightarrow +\infty$ et $(a_{n+1} - a_n)$ est bornée.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telle que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que, si $f(a_n) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

638. Pour $a \in \{0, 1\}$, on pose $v_{1,a} = x \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1,a} = \left(2 + \frac{1}{n}\right) v_{n,a} - a$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Expliciter $t_n \neq 0$ tel que $v_{n,0} = xt_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 b) Exprimer $\frac{v_{n+1,a}}{t_{n+1}} - \frac{v_{n,a}}{t_n}$ en fonction de t_{n+1} .
 c) En déduire la limite des suites $(v_{n,a})_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de x .

639. Soit (a_n) définie par $a_0 = 0, a_1 = 1$, et, pour $n \geq 1, a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$.

- a) Montrer que, pour tout $n, a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1$.
 b) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{4a_k^2}\right)$. Exprimer S_n en fonction de a_n et a_{n+1} .
 c) Montrer que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{12}$.

640. Soit (x_n) définie par $x_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + e^{-x_n^2}$. En étudiant les suites de termes généraux $u_n = \frac{e^{x_n^2}}{x_n}$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$, trouver un équivalent puis un développement asymptotique de x_n .

641. Soit $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln(10)}$.

- a) Montrer que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 b) Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
 Montrer que $A = \{\{n\alpha\}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.
 c) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que l'écriture décimale de 2^k commence par 2025.

642. a) Soit $a \in]1/2, 1]$.

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = 2^{-n} \sum_{\frac{n-n^a}{2} \leq k \leq \frac{n+n^a}{2}} \binom{n}{k}$.

- b) Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles telle que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset \llbracket 0, n \rrbracket$. Y a-t-il équivalence entre : *i*) $|I_n| = o(n)$, *ii*) la suite de terme général $2^{-n} \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k}$ tend vers 0?

643. a) Donner un équivalent de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- b) Donner un équivalent de u_n , cardinal de $\{(x, y, z) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3, xy = z\}$.
 c) Donner un équivalent de v_n , cardinal de $\{(x, y, z) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3, xy = z^2\}$.

644. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^{+*} .

On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

645. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum (-1)^n \frac{\sin(\arctan(n^\alpha))}{n}$?

646. Soit α un réel > 1 . Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

a) Vérifier la bonne définition de u_n , et en donner un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$.

b) On pose $v_n = \frac{u_{n^2}}{u_n}$ pour tout $n \geq 1$. Étudier la convergence des séries $\sum v_n$ et $\sum (-1)^n v_n$.

647. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{\sqrt{n!}}{(1 + \sqrt{1})(1 + \sqrt{2}) \cdots (1 + \sqrt{n})}$. Étudier la convergence

et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

648. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Démontrer la convergence et calculer la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

649. a) Montrer que : $\sum_{k=0}^n (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} = O(\sqrt{n})$.

b) Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k} z^k$ est une série convergente.

650. Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}$. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ diverge.

651. a) Montrer que la série $\sum \frac{2^{k+1}(k!)^2}{(2k+1)!}$ converge. On pose $\sigma = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k+1}(k!)^2}{(2k+1)!}$.

b) Soient $a > 0$ et $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

c) En déduire que, si la série de terme général u_n converge, alors la série de terme général

$\frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k u_k$ converge. Lorsqu'il y a convergence, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i u_i \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

d) Montrer que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

e) En déduire la valeur de σ .

652. On pose $a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$.

a) Montrer que $\sum (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n))$ converge.

b) Donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Démontrer que $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

653. a) Soit $a > 0$. Discuter de la nature de $\sum \frac{1}{(n!)^{a/n}}$ en fonction de a .

b) Soit $(v_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum (n!)^{2/n} v_n^2$ converge. Montrer que $\sum v_n$ converge.

654. Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln t)}{t} dt$ sont de même nature.

Quelle est cette nature ?

655. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle. Nature de $\sum u_n$ avec les conditions suivantes :

i) $n(u_{n+1} - u_n) \rightarrow 1$, **ii)** $n^2(u_{n+1} - u_n) \rightarrow 1$, **iii)** $n^p(u_{n+1} - u_n) \rightarrow 1$ avec $p > 2$.

656. Soit (u_n) strictement positive telle que $\sum u_n$ converge.

a) Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k u_k \rightarrow 0$.

b) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k$ converge.

c) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n+1} \left(n! \prod_{k=1}^n u_k\right)^{1/n}$ converge, puis montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(n! \prod_{k=1}^n u_k\right)^{1/n} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

657. Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes positifs ou nuls.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n(n!)^{1/n}} \sum_{k=1}^n k a_k$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} \leq \frac{e}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k a_k$.

c) Montrer que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

658. Soit f strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

659. Soient a et b deux réels. Caractériser l'existence d'une fonction continue décroissante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = ax + b$.

660. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel $f|_{[x-\varepsilon, x+\varepsilon]}$ est convexe.

a) Montrer que f est dérivable à droite en tout point.

b) Montrer que f est convexe et continue sur \mathbb{R} .

661. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que f est convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt.$$

662. Soient $\alpha > 1$ et $f_\alpha : x \in]-1-\alpha, +\infty[\mapsto \alpha \ln\left(1 + \frac{x}{1+\alpha}\right)$.

a) Montrer que f_α admet un unique point fixe x_α et que $x_\alpha \in]-2, -1[$.

b) On suppose que α est tel que $\frac{x_\alpha}{1+\alpha} > -\frac{1}{2}$. Montrer que

$$\left| \ln\left(1 + \frac{x_\alpha}{1+\alpha}\right) - \frac{x_\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{x_\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \right| \leq \frac{8}{3} \frac{|x_\alpha|^3}{(1+\alpha)^3}.$$

663. On note E l'ensemble des applications réelles continues sur \mathbb{R} de carré intégrable. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)^{1/2}$.

a) Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

b) Soit $f \in E$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f'' \in E$. Montrer que $f' \in E$ et $\|f'\|^2 \leq \|f\| \cdot \|f''\|$.

664. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On note S l'ensemble des fonctions continues sur I telles que, pour tout $x \in I$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)) = 0$.

a) On suppose f dérivable sur I . Montrer que $f \in S$.

b) On suppose que $f \in S$ et que f admet un maximum en $x_0 \in I$. Montrer que f est dérivable en x_0 .

665. On pose $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ et qu'il existe une suite $(P_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}[X]^\mathbb{N}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$.

b) Montrer que f n'est solution sur \mathbb{R} d'aucune équation différentielle de la forme $y' = a(x)y$ avec $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

c) Montrer que P_n est scindé sur \mathbb{R} quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

666. Étude et graphe de $f : x \mapsto \frac{\ln(|x|)}{\ln(|x-2|)}$.

667. ★ Soit $f \in \mathcal{D}^3(\mathbb{R})$, telle que $ff^{(3)} = 0$.

a) Montrer que si f' est strictement monotone sur un intervalle I , f prend au plus deux fois chaque valeur sur I .

b) Soit $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0\}$. Montrer que si $\Gamma \neq \emptyset$, alors Γ n'est ni majoré, ni minoré.

c) Montrer que Γ est un intervalle de \mathbb{R} . Caractériser f .

668. a) Soient $\lambda > 0$ et $f_\lambda : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^{-\lambda}e^{1/x}$. Montrer l'existence d'un unique $g(\lambda) > 0$ tel que $f_\lambda(g(\lambda)) = 1$.

b) Trouver un développement asymptotique de $g(\lambda)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ et lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$.

669. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On suppose que F est stable par produit. Montrer que F ne contient que des fonctions constantes.

670. On munit \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne canonique. Soient $r \in \mathbb{R}^+$ et $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|v\| \leq r$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \|f(x)\| = r, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f = v \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x).$$

671. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre

i) $AB = BA$, ii) $\forall t \in \mathbb{R}, e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$.

672. Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{x \cos(x) \sin(x)}{\cos^4(x) + \sin^4(x)} dx$.

673. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On se place sur $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On introduit, pour $f \in E$

$$\text{et } p \in \mathbb{N}^* : \|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}.$$

a) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur E .

b) Que vaut $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p$?

c) Si $f \geq 0$ et $g > 0$ sur $[a, b]$, que vaut $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b gf^p \right)^{1/p}$?

674. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$\text{Montrer que } \int_0^1 f''(x)^2 dx \geq 320 \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2.$$

675. On pose $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

a) Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe un unique élément $u(f) \in E$ vérifiant :

$$\forall x > 0, u(f)(x) = \frac{1}{x^{p+1}} \int_0^x t^p f(t) dt.$$

- b)** Montrer que u est linéaire et injective.
c) Déterminer les valeurs propres de u .

676. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $E_a = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) ; f(0) = f(1) = 0 \text{ et } f'(0) = a\}$. Montrer que $\int_0^1 f''(t)^2 dt \geq 3a^2$ pour tout $f \in E_a$.

677. Déterminer les f de $\mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt = 0$.

678. Déterminer la borne inférieure de $\int_0^1 |f' - f|$ lorsque $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ parcourt l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

679. Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou \mathbb{C} et $\delta > 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leq \delta$ et $\int_a^b f = \int_a^b P$. On pourra commencer par le cas réel.

680. Expliciter la fonction $F : x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t}) dt$.

681. Déterminer $A = \left\{ \frac{\int_0^1 f(t) e^t dt}{\int_0^1 f(t) dt} ; f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+) \setminus \{0\} \right\}$.

682. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x \cos(x-y) f(y) dy$.

- a)** Calculer la limite de g en 0.
b) On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

683. On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$.

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{2 - 2 \cos(u) - u \sin(u)}{u^4} du$.

684. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos t - \cos x} dt$.

- a)** Donner un sens à l'intégrale I_n .
b) Expliciter I_n .

685. a) Montrer que, pour tout réel $a > -1$, $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{a+1}}$.

Ind. Poser $x = \tan t$.

b) Soit α un réel > 0 . Étudier la convergence de $\sum u_n$, où $u_n = \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2 t}$.

c) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$.

686. Calculer $\int_0^1 (-1)^{[1/x]} dx$.

687. Soient f une fonction continue périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ est-elle convergente ? absolument convergente ?

688. a) Soit $a > 0$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t} dt$.

b) Soient $a_1, \dots, a_n > 0$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Discuter la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\cos(a_i t)}{t} dt$ et en cas de convergence, la calculer.

689. a) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{+*})$ décroissante et intégrable. Soit $S : r \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} f(kr)$.

Montrer que $S(r)$ existe et donner un équivalent de $S(r)$ lorsque $r \rightarrow 0^+$.

b) Soient $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > a > 0$. On suppose que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$

converge. Prouver la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$.

c) Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$.

690. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction de classe C^1 telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{2}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \sim \frac{f(x)}{3}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

691. Soient $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}^*$. On suppose que : $f(x) \int_0^x f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

692. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

a) Montrer que f est bien définie.

b) Étudier l'intégrabilité de f sur $]0, +\infty[$.

c) Le cas échéant, calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

693. a) Montrer qu'il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$ pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$.

c) Montrer l'existence de $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\ln(1+t)} \right) dt$ puis l'égalité

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1-e^{-u}} \right) du.$$

d) Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-nu} - e^{-(n+1)u}}{u} - e^{-nu} \right) du$.

e) En déduire que $I = -\gamma$.

694. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$.

a) Montrer que $\int_0^1 f(t)f'(t) \cotan(\pi t) dt$ converge.

b) En déduire que $\pi^2 \int_0^1 f(t)^2 dt \leq \int_0^1 f'(t)^2 dt$.

695. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que f est intégrable sur \mathbb{R}^+ , que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que

f' est croissante. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\int_x^{+\infty} f^2 \leq \frac{2}{3} f(x) \int_x^{+\infty} f$.

696. On note E l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} . Soit

$f \in E$. On pose $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f$ pour tout $x > 0$.

a) Montrer que g est continue et $\int_0^x g^2 = -xg(x)^2 + 2 \int_0^x fg$.

b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x g^2 \leq 4 \int_0^x f^2$.

En déduire que $g \in E$ et $\int_0^{+\infty} g^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2$.

697. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n \ln(x)$ si $x \in]0, 1]$, et $f_n(0) = 0$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers 0.

698. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Quelles sont les fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{R} qui sont limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite $(p_n)_{n \geq 0}$ de polynômes tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$, $p_n''(x) > 0$?

699. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Montrer l'équivalence entre :

i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k e^{-kx} \right| \leq \varepsilon;$$

ii) f est continue sur \mathbb{R}^+ et admet une limite finie en $+\infty$.

700. Soit (f_n) une suite de fonctions convexe sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que (f_n) converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f .

a) Montrer que f est convexe.

b) Soient α, η tels que : $a < \alpha < \eta < b$. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in [\alpha, \eta]^2, |f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|.$$

c) i) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de $]a, b[$ mais pas nécessairement sur $[a, b]$.

ii) Montrer que si f est continue, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

701. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$.

a) Déterminer les domaines de définition, de continuité, puis de dérivabilité de f .

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis en donner un équivalent simple.

702. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1+x}{n+x}\right)$. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}^{+*} .

Déterminer la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

703. a) Soit $x \in [0, 1[$. Justifier l'existence de $f(x) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right)^{x^n}$.

b) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $\ln(f(x)) = \ln 2 + \frac{x-1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ln(1+x^n)$.

c) En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, $\ln(f(x)) = \ln 2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{x^m}{1+x+\dots+x^m}$.

d) Montrer que f possède une limite finie en 1 et la déterminer.

On admettra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

704. a) Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x)}$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Déterminer un équivalent de f en 0^+ .

705. a) Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$ est définie et continue sur \mathbb{R} .

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, donner une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

c) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur tout segment inclus dans $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

706. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

- a) Domaine de définition de f ?
 b) Étudier la continuité de f sur son domaine de définition. Est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?
 c) Déterminer des équivalents de f en 0 , 1^- , 1^+ et $+\infty$.

707. Soient $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

- a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .
 b) Calculer $f^{(n)}$ et expliciter $f^{(n)}(0)$ en fonction de $f(0)$.
 c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum \frac{1}{n!} a^{n(n-1)/2} x^n$.

On suppose $a \in]0, 1[$ et l'on note : $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^{n(n-1)/2} x^n$.

- d) Montrer que g est bien définie sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^∞ et : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(ax)$.
 e) On suppose $f(0) = 0$. Montrer que $f = 0$.
 f) Résoudre l'équation fonctionnelle : $y'(x) = y(ax)$.

708. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et dérivable, vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x+1)$.

- a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(n)}{n!} x^n$.
 b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = - \sum_{n=k+2}^{+\infty} \frac{f(n)}{(n-k)!}$.
 c) Montrer que $f = 0$.

709. Soit $f : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \mapsto \frac{-\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$.

- a) Montrer que f est bien définie, 1-périodique et continue.
 b) Montrer que f est prolongeable par continuité sur \mathbb{R} et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

- c) Montrer que $f = 0$ et en déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

710. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ une fonction croissante telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{x}$ avec $a > 0$.

- a) Rappeler les théorèmes d'intégration des équivalents et donner un équivalent de $\ln(f(x))$ quand $x \rightarrow +\infty$.

- b) On pose $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) e^{-nx}$. Déterminer le domaine de définition de u et donner les limites de u aux bornes de ce domaine.

711. Soit $p \in]0, 1[$. Soit f définie par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^x p^n$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Tracer une allure du graphe de f .
- Étudier l'intégrabilité de f en $-\infty$.

712. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $F_\lambda : s \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{s(s+1)\cdots(s+n)}$.

- Déterminer l'ensemble Δ_λ des $s \in \mathbb{R}^{+*}$ pour lesquels $F_\lambda(s)$ est bien défini.
- Trouver la limite de F_λ quand $s \rightarrow \sup(\Delta_\lambda)$.
- Donner un équivalent de $F_\lambda(s)$ quand s tend vers $\inf(\Delta_\lambda)$.
- Calculer $\int_0^1 y^n (1-y)^{s-1} dy$. En déduire une expression intégrale de $F_\lambda(s)$.

713. On admet que π est irrationnel. Soit $\alpha > 1$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \left(\frac{\cos(n)}{\alpha} + \frac{\alpha}{n} \right)^n$.

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
- Étudier la convergence de la série en R .

714. Soient $q \in]-1, 1[$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x)$.

- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

715. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{sh}(x\sqrt{t}) dt$.

- Donner le domaine de définition de f .
- Développer f en série entière puis exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

716. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t dt$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, faire l'étude aux bords et calculer la somme.

717. Notons D_n le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ qui n'admettent aucun point fixe. On pose par convention $D_0 = 1$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} D_k = n!$.

b) Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$. Montrer que S a un rayon de convergence ≥ 1 .

c) Calculer $e^x S(x)$ et en déduire une expression de D_n .

718. On définit $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ pour z complexe lorsque cela a un sens, et $f(0) = 1$. On

définit une suite réelle $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$.

a) Déterminer le domaine de définition de f .

b) Montrer que $|b_n| \leq n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que f est développable en série entière autour de 0 et que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ pour z voisin de 0. Montrer que le rayon de convergence de la série entière en question appartient à $[1, 2\pi]$.

d) En considérant $z \mapsto f(z) + \frac{z}{2}$, calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ impair.

e) Montrer que \tan est développable en série entière autour de 0 et expliciter le développement en série entière associé en fonction des b_n . *Ind.* Considérer $f(z) + f(-z)$.

719. Soit $p \in \mathbb{R}$. L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x + \sqrt{1 + x^2})^p$ est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

720. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{x}{2^k}\right)$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction u que l'on ne cherchera pas à expliciter.

b) Montrer que u est continue sur \mathbb{R} .

c) Montrer que u est développable en série entière au voisinage de 0.

721. On considère : $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{in^2 x}$.

a) Montrer que f est bien définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

b) Montrer que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

722. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{u_n} \frac{dt}{1 + \sin t}$.

a) Déterminer la limite de la suite (u_n) et étudier le comportement de la suite (a_n) .

b) Montrer la divergence de $\sum u_n^2$ et la convergence de $\sum u_n^3$.

c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Préciser le comportement de sa somme en 1 et en -1 .

723. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe telle que $\sum n|a_n|$ converge. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

a) Montrer que le rayon de convergence de f est ≥ 1 .

b) On suppose que $a_1 \neq 0$ et que $\sum_{n=2}^{+\infty} n |a_n| \leq |a_1|$. Montrer que f est injective sur le disque unité ouvert.

724. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p(n)$ le cardinal de l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 ; x + 2y + 3z = n\}$.

Soit $G : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p(n) t^n$.

a) Montrer que le rayon de G est ≥ 1 et que $\forall t \in]-1, 1[, G(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$.

b) Expliciter $p(n)$ et en déterminer un équivalent.

725. Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$. Montrer que, pour tout $x \in I$, il existe $r > 0$ et $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $]x - r, x + r[\subset I$ et

$$\forall t \in]-r, r[, f(x+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

726. a) Déterminer les endomorphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Si $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifie la propriété \mathcal{P} si le rayon de convergence de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ est supérieur ou égal à } 1 \text{ et si } x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ admet une limite finie en } 1^-.$$

b) Montrer que, si $\sum a_n$ converge absolument, $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifie \mathcal{P} . Étudier la réciproque.

c) Déterminer les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que, pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifiant \mathcal{P} , la suite $(f(a_n))_{n \geq 0}$ vérifie \mathcal{P} .

727. a) Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $f \in C^0([0, p/q], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $P_n = \frac{X^n(p - qX)^n}{n!}$. Montrer que : $\int_0^{p/q} P_n(t) f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

b) Montrer que π est irrationnel.

728. Déterminer un équivalent de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} |\cos t|}{\sqrt{t}} dt$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

729. Déterminer un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} (1 + nx^4)^{-n} dx$.

730. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ strictement croissante vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que : $\int_0^1 f(t)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

731. On pose : $\forall x \in]0, 1[, f(x) = \frac{-x}{\ln(1-x)}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.

a) Étudier la bonne définition, la convergence et la limite de la suite (I_n) .

b) Déterminer un équivalent simple de I_n .

732. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ bornée.

Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{1}{n} \left(\int_0^{+\infty} (\ln(1 + e^{nf(x)}))^n e^{-x} dx \right)^{1/n}$.

733. Soit $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$. On pose $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{1 - 2a \cos t + a^2} dt$.

a) Montrer que $a(I_n + I_{n+2}) = (a^2 + 1)I_{n+1}$ pour tout n .

b) Calculer I_n .

734. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n dx$.

a) Trouver une relation de récurrence vérifiée par (I_n) et en déduire un équivalent de I_n .

b) Donner le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.

c) Montrer que $I_{2n} = (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Exprimer de même I_{2n+1} .

735. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \cos(2xt) dt$.

a) Donner une relation entre I_n et I_{n+2} .

b) Montrer que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})$ est constante et en déduire $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

c) i) Montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [0, \pi/2], \cos(t) \leq 1 - \alpha t^2$ et déduire que $\int_0^{\pi/2} \sqrt{nt} \cos^n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

ii) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi/2], \mathbb{R})$. Montrer que $\frac{1}{I_n} \int_0^{\pi/2} f(t) \cos^n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$.

iii) Montrer que, si $x \neq \pm \frac{n}{2}$, alors $J_n = \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)^{-1} \frac{n-1}{n} J_{n-2}$.

iv) Conclure que, si $x \in]-\pi, \pi[$, alors $\pi x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi x)$.

736. Exprimer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2+1} dx$ sous forme de somme d'une série.

737. On appelle suite de fonctions de Bertrand une suite (f_n) de fonctions continues sur \mathbb{R}^+ à valeurs positives, uniformément majorées et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} f_n = 1$.

Soit \mathcal{B} une suite de fonctions de Bertrand et $\sum a_n$ une série numérique réelle. On dit que $\sum a_n$ est \mathcal{B} -convergente si

– $\sum a_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ , vers une fonction continue ;

– $\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n$ est une intégrale convergente.

a) Montrer que toute série absolument convergente est \mathcal{B} -convergente.

b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^+, f_n(t) = \frac{t^n e^{-t}}{n!}$. Montrer que (f_n) est une suite de fonctions de Bertrand. Expliciter une série divergente qui est \mathcal{B} -convergente.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq n \\ t - n & \text{si } n < t \leq n + 1 \\ n + 2 - t & \text{si } n + 1 < t \leq n + 2 \\ 0 & \text{si } t > n + 2. \end{cases}$

Montrer que (f_n) est une suite de Bertrand et montrer qu'une série $\sum a_n$ converge si et seulement si elle est \mathcal{B} -convergente.

En cas de convergence, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n$.

738. Montrer l'existence et calculer : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \cos(\lambda \sin t) dt$.

739. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $F(0) = 0$ et, pour $x \in]0, 1]$, $F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$. Étudier la continuité de F .

740. Soit $F : a \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$. Montrer que F est constante, en déduire sa valeur.

741. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t} dt$.

742. Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

a) Domaine de définition D de F .

b) Montrer que $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$ pour tout $x \in D$.

c) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

743. a) Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ soit absolument convergente. On note $G(z)$ cette intégrale.

b) i) On pose $I_n : z \mapsto \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. Justifier que I_n est bien définie.

ii) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(z) = G(z)$.

c) Montrer que G ne s'annule pas sur son domaine de définition.

744. On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

a) Déterminer le domaine de définition D de F .

b) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 , puis calculer F .

c) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{(\arctan t)^2}{t^2} dt$.

745. a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ est une intégrale convergente.

b) Montrer que : $G : t \mapsto \left(\int_0^t e^{ix^2} dx \right)^2 + i \int_0^1 \frac{e^{it^2(x^2+1)}}{x^2+1} dx$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer G' .

c) On admet que : $\int_0^1 \frac{e^{it^2(x^2+1)}}{x^2+1} dx \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Calculer $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

746. Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

a) Domaine de définition D de F . Montrer que F est positive et décroissante.

b) Montrer que $F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ pour tout $x \in D$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

c) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur D et que $F(x) - F'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in D$. En déduire que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur D .

d) Montrer que $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ pour tout $x \in D$ et en déduire la limite de F en 0^+ .

e) Montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$.

747. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

a) Trouver une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ pour $x > 0$.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(\Gamma(n))$.

Montrer que $u_n = n \ln(n) - n - \frac{\ln(n)}{2} + \frac{\ln 2\pi}{2} + o(1)$.

748. Soient $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{C}), f(0) = f(1) = 0\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$.

a) Montrer que $\Delta : f \mapsto f''$ est un isomorphisme de E dans F .

b) Pour $g \in F$, on pose $G : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 |x-t| g(t) dt$. Montrer que G est de classe \mathcal{C}^2 et calculer G'' .

c) En déduire une fonction de deux variables $k : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$\forall g \in F, \forall x \in [0, 1], \Delta^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x, t) g(t) dt$.

749. Soit $F : a \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+at^2)}}$. Donner un équivalent de F en $+\infty$.

750. On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \left(e^{-xt} \int_0^t \frac{\sin(u)}{u} du \right) dt$. Montrer que f est définie sur \mathbb{R}^{+*} et exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

751. a) Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt$ et montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur ce domaine.

b) Donner un équivalent de f en chacune des bornes du domaine.

752. Soient f, g continues sur \mathbb{R} .

a) On suppose f intégrable sur \mathbb{R} et g bornée.

Montrer que $(f * g) : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt$ est continue et bornée sur \mathbb{R} .

b) On suppose f et g de carré intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que $f * g$ est définie et bornée sur \mathbb{R} .

753. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}^{+*})$. Soient $N_f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \left(\int_0^1 f(t)^x dt \right)^{1/x}$.

a) Montrer que N_f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} .

b) Déterminer la limite de N_f en $+\infty$.

c) Déterminer la limite de N_f en 0^+ .

754. On pose $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et on se donne $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

a) Montrer que $T : f \in E \mapsto \left[x \mapsto \int_0^x f(t) K(x, t) dt \right]$ est un endomorphisme de E .

b) Soit $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\partial_2 \varphi$ soit définie et continue sur $[0, 1]^2$.

i) Montrer que $(u, s) \in [0, 1]^2 \mapsto \int_0^u \varphi(x, s) dx$ est de classe \mathcal{C}^1 (dans un sens à préciser).

ii) En déduire que $g : s \in [0, 1] \mapsto \int_0^s \varphi(x, s) dx$ est de classe \mathcal{C}^1 , et expliciter sa dérivée.

c) On pose $T^* : f \in E \mapsto \left[x \mapsto \int_x^1 f(t) K(x, t) dt \right]$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E

défini par $\langle a, b \rangle = \int_0^1 a(t) b(t) dt$. Montrer que $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle T(f), g \rangle = \langle f, T^*(g) \rangle$ et que T^* est l'unique endomorphisme de E ayant cette propriété.

755. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que l'équation différentielle $y' - y + f = 0$ possède une unique solution bornée.

756. On considère l'équation différentielle $(E) : 6(1+t^2)y'' - 2y = t$.

a) Déterminer une solution polynomiale non nulle φ de $(1+t^2)y'' - 2y = 0$.

b) Résoudre (E) grâce au changement de fonction inconnue $y = \varphi z$.

757. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π -périodique.

L'équation différentielle $y'' + k^2 y = f$ admet-elle une solution 2π -périodique ?

758. Soient $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $K \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que toute solution non nulle de l'équation différentielle $y'' + \varphi(x)y' - Ky = 0$ s'annule au plus une fois sur \mathbb{R} .

759. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f''(x) \geq 0$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$.

760. Soit (*) l'équation différentielle $2xy'' + y' - y = 0$.

a) Trouver une solution f de (*) développable en série entière au voisinage de 0 et telle que $f(0) = 1$.

b) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

c) Déterminer toutes les solutions de (*).

761. On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et ϕ l'endomorphisme de E défini par :

$\forall f \in E, \forall t \in \mathbb{R}, \phi(f)(t) = f'(t) + tf(t)$.

a) Déterminer les éléments propres de ϕ .

b) Déterminer les éléments propres de ϕ^2 .

c) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2ty + (t^2 + 3)y = 0$.

762. Soit (E) l'équation différentielle sur \mathbb{R}^{+*} : $ty'' + ty' - y = 0$.

a) Déterminer les réels a tels que $h_a : t \mapsto t^a$ soit solution de (E).

b) Soient $g : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{e^{-t}}{t^2}$ et $G : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_1^t g(s) ds$. Dresser le tableau de variation

de G . Étudier la limite de G en 0^+ et montrer que G admet une limite finie en $+\infty$.

c) Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et $h : t \mapsto tf(t)$. Montrer que h est solution de (E) si et seulement si f' est solution de : $(E') : z' + \left(1 + \frac{2}{t}\right)z = 0$.

d) Résoudre l'équation (E) et étudier le comportement des solutions en 0^+ .

763. On note (S) le problème de Cauchy $(-2y'' + xy' + y = 0, y(0) = \sqrt{\pi}, y'(0) = 0)$.

a) Montrer que (S) possède une unique solution développable en série entière sur \mathbb{R} et l'expliciter.

b) On pose : $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et expliciter $f(x)$.

764. Montrer que la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ n'est pas solution sur \mathbb{R}^{+*} d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

765. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(1/x) = -f(x/2)$.

766. Soit $q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ continue. On suppose que (E) : $y'' + q(x)y = 0$ admet une solution strictement positive y et on pose $f = \frac{y'}{y}$.

- a) Trouver une équation différentielle d'ordre 1 dont f est solution.
 b) Montrer que f est décroissante et strictement positive.
 c) Montrer que q est intégrable sur \mathbb{R}^+ et que $\int_x^{+\infty} q(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$.

767. L'espace \mathbb{R}^n est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :
 i) $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,
 ii) toute solution $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $x' = Ax$ est de norme constante.

768. a) Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$.

On suppose qu'il existe $A > 0$ telle que $\forall x \geq 0, f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t) dt$.

Montrer que $\forall x \geq 0, f(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t) dt\right)$.

b) Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que b est intégrable sur \mathbb{R}^+ et $u \mapsto ua(u)$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Soit x une solution sur \mathbb{R}^+ de l'équation différentielle $x'' + ax = b$. Montrer que, pour tout $t \geq 0, x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)a(u)x(u) du + \int_1^t (t-u)b(u) du$.

769. Résoudre les systèmes différentiels

$$\begin{cases} x' = 7x + 3y + te^t \\ y' = 3x - y + e^t \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + y + z \\ z' = x + 2y + 2z \end{cases},$$

$$\begin{cases} x'' = 9x + 10y \\ y'' = -5x - 6y \end{cases}, \quad \begin{cases} x'(t) = (t+3)x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -4x(t) + (t-3)y(t) \end{cases}.$$

770. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$. Déterminer les solutions de : $X' = AX$.

771. Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la matrice e^{tA} soit stochastique, c'est-à-dire que tous ses coefficients sont positifs, et que la somme des coefficients sur n importe quelle ligne vaut 1.

772. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (-1)^{i+j}m_{i,j} \geq 0\}$.

a) Montrer que \mathcal{A} est stable par $+$ et \times .

b) Soient $A \in \mathcal{A}$ et $M \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}^+, M'(t) = AM(t)$ et $M(0) \in \mathcal{A}$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, M(t) \in \mathcal{A}$.

773. Soit $A : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\forall t \in [0, 1], A^2(t) - 5A(t) + 6I_n = 0.$$

a) Montrer qu'il existe une fonction $P : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in [0, 1], A(t) = P(t)A(0)P(t)^{-1}$.

b) Soient $t \in [0, 1], \lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A(t)X = \lambda X$.

Montrer que $A(t)A'(t)X = (5 - \lambda)A'(t)X$.

c) Montrer qu'il existe une fonction $P : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\forall t \in [0, 1], A(t) = P(t)A(0)P(t)^{-1}$.

774. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2)^x & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$

- a) Étudier la continuité de f .
- b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?
- c) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x, 0)$.
- d) Étudier les extrema de f .

775. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} - \frac{xy}{\sqrt{2}}$.

Déterminer les extrema de f et préciser leur nature.

776. Soit $D = \{(x, y) \in [0, \pi]^2 ; x + y \leq \pi\}$.

Déterminer les extrema de $\phi : (x, y) \in D \mapsto \sin(x) \sin(y) \sin(x + y)$.

777. Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 - xy^2$.

- a) Déterminer les points critiques de f .
- b) Soit D une droite passant par $(0, 0)$. Montrer que la restriction de f à D admet un minimum local en $(0, 0)$.
- c) La fonction f possède-t-elle un extremum local en $(0, 0)$?

778. Soit E un espace vectoriel normé non nul. Soit N une norme quelconque sur E . Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

779. a) Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer : $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$.

b) Soit D le sous-espace des formes linéaires ϕ sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant :

$\forall (f, g) \in E^2, \phi(fg) = f(0)\phi(g) + g(0)\phi(f)$.

Montrer que D est de dimension finie puis que $\dim D = n$.

780. a) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

On pose $g : x \in E \mapsto f(x) e^{-\|x\|^2}$. Montrer que g admet un minimum et un maximum.

b) On prend $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $g : x \in E \mapsto \langle a, x \rangle e^{-\|x\|^2}$. Déterminer le minimum et le maximum de g et indiquer les points en lesquels ils sont atteints.

781. Déterminer les extrema de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xe^y + ye^x$.

782. On considère la fonction $f : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \int_{-1}^1 |t^2 + at + b| dt$.

- a) Déterminer le minimum de la fonction $b \mapsto f(0, b)$.
- b) On fixe $b \in \mathbb{R}$. Déterminer le minimum de la fonction $a \mapsto f(a, b)$.
- c) Déterminer le minimum de f .

783. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés. On pose, pour $(x, y) \in E \times F$, $\|(x, y)\|_{E \times F} = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$. Soit $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire et continue.

a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in E \times F$ vérifiant la condition $\|(x, y)\|_{E \times F} \leq \alpha$, on ait $\|B(x, y)\|_G \leq 1$.

En déduire que $\|B(x, y)\|_G \leq \frac{\|x\|_E \|y\|_F}{\alpha^2}$ pour tout $(x, y) \in E \times F$.

a) Montrer que B est différentiable et que $dB(x, y) \cdot (h, k) = B(x, k) + B(h, y)$.

b) Montrer que $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2 \mapsto u \circ v$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

784. a) Calculer la différentielle de la fonction $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ en I_n .

b) Montrer de deux façons différentes que \det n'atteint pas d'extremum local en I_n .

c) Que peut-on dire d'un éventuel extremum local de la fonction \det ?

d) On fixe $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Expliciter une matrice « simple » de rang r de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La fonction \det y atteint-elle un extremum local ?

785. Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n , $x_0 \in \mathcal{U}$ et trois applications $f, g_1, g_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $g_1 \leq f \leq g_2$ et $g_1(x_0) = g_2(x_0)$. On suppose de plus que g_1 et g_2 sont différentiables sur \mathcal{U} . Montrer que f est différentiable en x_0 .

786. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie (non nulle).

Soit $f : B_F(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ continue, constante sur la sphère unité et différentiable sur la boule ouverte $B_o(0, 1)$. Montrer que f admet un point critique sur $B_o(0, 1)$.

787. On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative.

a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall X \in E, |\operatorname{tr} X| \leq C \|X\|$.

b) Montrer que $g : X \mapsto X^2$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

c) Montrer que $f : X \mapsto \operatorname{tr} X^2$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

d) Montrer que : $\forall (A, B) \in E^2, |\operatorname{tr} A^2 - \operatorname{tr} B^2| \leq 2C \max(\|A\|, \|B\|) \|A - B\|$.

788. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et k un entier ≥ 1 . Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

i) $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n, f(tx) = t^k f(x)$, **ii)** $\forall x \in \mathbb{R}^n, df(x)(x) = k f(x)$.

789. Soit ϕ définie sur \mathbb{R}^+ par : $\forall t > 0, \phi(t) = -t \ln t$ et $\phi(0) = 0$. Soit $N \geq 2$.

On pose : $\Sigma_N = \left\{ p \in (\mathbb{R}^+)^N ; \sum_{i=1}^N p_i = 1 \right\}$.

Soit h définie sur Σ_N par : $\forall p \in \Sigma_N, h(p) = \sum_{i=1}^N \phi(p_i)$.

a) Montrer que Σ_N est un compact convexe.

b) Montrer que ϕ est continue et strictement concave sur \mathbb{R}^+ , c'est-à-dire que

$\forall \lambda \in]0, 1[, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x \neq y \Rightarrow \phi((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)\phi(x) + \lambda\phi(y)$.

c) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que $a < b$. Soit $t \in]0, (b-a)/2[$.

Montrer que $\phi(a+t) + \phi(b-t) > \phi(a) + \phi(b)$.

d) Montrer que h admet un maximum, atteint en un unique point p .

e) En raisonnant sur $q = (p_1 + \varepsilon, p_2 - \varepsilon, p_3, \dots, p_N)$, montrer que $p_1 = \dots = p_N$.

790. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

a) Rappeler pourquoi f possède une base orthonormée de vecteurs propres.

b) Rappeler pourquoi $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\langle x, f(x) \rangle > 0$.

c) Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2} \langle x, f(x) \rangle - \langle v, x \rangle$ est de classe \mathcal{C}^1 .

d) Déterminer le gradient de g en tout point.

e) Montrer que g admet un unique point critique, en un point noté c , et préciser sa valeur.

f) Montrer que g a un extremum global en c . La fonction g possède-t-elle d'autres extrema ?

791. Soit $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \exp\left(n - 1 - \sum_{k=1}^n x_k\right) + \sum_{k=1}^n e^{x_k}$.

a) Déterminer les points critiques de f .

b) Préciser la hessienne aux points critiques. Qu'en déduire sur f ?

c) Déterminer les extrema de f .

792. Soit $n \in \mathbb{N}$. On munit \mathbb{R}^{n+1} de sa structure euclidienne canonique.

Pour $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on pose

$$f(x, y) = \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq k \leq 2n}} x_i y_j \right) \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

a) Montrer que, si x et y sont non nuls, alors $f(x, y)$ est non nul.

b) On pose $u : x \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto f(x, x)$ et $v : x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \frac{f(x, x)}{\|f(x, x)\|}$.

Étudier la différentiabilité de u et v et calculer leurs différentielles quand c'est possible.

c) Déterminer le rang de $dv(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul.

793. Soit $n \geq 2$. On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soient $c > 0$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|f(x) - f(y)\| \geq c \|x - y\|$.

a) Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\|df(a)(h)\| \geq c \|h\|$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. En déduire que $df(a)$ est bijective.

b) Soient $b \in \mathbb{R}^n$ et $g_b : x \mapsto \|f(x) - b\|^2$. Montrer que g_b admet un minimum sur \mathbb{R}^n .

c) En déduire que f est bijective.

794. On considère l'application $f : P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P^T P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que, si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, la différentielle de f en M est surjective.

b) On pose $g = f|_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$. Si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la différentielle de g en M est-elle surjective ?

795. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, D_1, \dots, D_p des droites affines de \mathbb{R}^2 non parallèles deux à deux, f_1, \dots, f_p des formes linéaires non nulles telles que chaque f_i soit constante (égale à a_i)

sur D_i . On pose $T = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^p D_i$, et on considère une composante connexe par arcs C de T .

a) Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Montrer que $g_i = f_i - a_i$ ne change pas de signe sur C .

b) Soit $\Phi : (x, y) \in C \mapsto \sum_{i=1}^p b_i \ln |g_i(x, y)|$ où les b_i sont des constantes > 0 .

i) Montrer que Φ est de classe \mathcal{C}^2 .

ii) Soient z_1 et z_2 dans C , et $\Psi : t \in [0, 1] \mapsto \Phi(tz_1 + (1-t)z_2)$. Montrer que Ψ est concave et que Ψ'' ne s'annule pas.

iii) Si C est bornée, montrer que Φ n'admet qu'un seul point critique sur C . La fonction Φ admet-elle un extremum en ce point ?

796. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Déterminer la limite lorsque r tend vers 0 de $\frac{1}{2\pi r^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt$.

797. Soient $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(B_f(a, r), \mathbb{R})$, de classe \mathcal{C}^2 sur $B_o(a, r)$.

On pose : $\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

a) On suppose : $\forall x \in B_o(a, r), \Delta(f)(x) > 0$. Montrer que f admet un maximum sur $B_f(a, r)$ et que ce dernier ne peut pas être atteint sur $B_o(a, r)$.

b) On suppose : $\forall x \in B_o(a, r), \Delta(f)(x) \geq 0$. Montrer que f atteint un maximum sur $B_f(a, r)$ et que ce dernier est atteint en un point de la sphère de centre a et de rayon r .

Ind. Pour $\varepsilon > 0$, poser $f_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x - a\|^2$.

798. Soit $n \geq 2$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les valeurs propres de la hessienne de f en x soient supérieures ou égales à 1.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{\|x\|^2}{2}$ et en déduire que f admet un minimum.

799. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$. Montrer que $f \xrightarrow{\infty} +\infty$.

800. ★★ Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

a) On suppose f de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que sa jacobienne $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = Ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) On suppose f de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que sa jacobienne $J_f(x)$ est symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f = \nabla g$.

801. Soit $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n, G(y) - G(x) \geq \langle \nabla G(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2$

a) Montrer que, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f admet un minimum.

b) Montrer que G atteint son minimum en un unique point.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla G(x) \neq 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto G(x + t\nabla G(x))$ atteint son minimum en un unique point. Que se passe-t-il si $\nabla G(x) = 0$?

d) Soit la suite (u_k) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = u_k + t_k \nabla G(u_k)$, où $t_k \in \mathbb{R}$ est tel que la fonction $t \mapsto G(u_k + t \nabla G(u_k))$ atteint son minimum en $t = t_k$. Quelle est la relation entre $\nabla G(u_{k+1})$ et $\nabla G(u_k)$?

e) Montrer que (u_k) converge.

802. a) Soit U un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que f est convexe si et seulement si $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour tout $x \in U$ (où $H_f(x)$ désigne la matrice hessienne de f en x).

b) On fixe $p \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit

$$f : (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p}.$$

À quelle condition la fonction f est-elle convexe ?

803. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On note $H_f(x)$ la matrice hessienne de f au point x .

a) Montrer que si $H_f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \langle a, x \rangle + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Montrer que si la fonction $x \mapsto H_f(x)$ est constante sur \mathbb{R}^n , alors il existe $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle + \langle a, x \rangle + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

804. Soit E un espace euclidien non nul dont on note S la sphère unité. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On pose : $f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ et $g : x \mapsto \|x\|^2 - 1$.

a) Montrer que f et g sont différentiables sur E et calculer les différentielles.

b) Montrer que la restriction de f à S admet un maximum, en un vecteur e .

c) Montrer que e est un vecteur propre de u .

805. Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ au point I_n est l'hyperplan des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

806. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que l'image de tout fermé de \mathbb{R}^n par f est fermée. On suppose de plus que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $df(a)$ est bijective. On pose $X = f(\mathbb{R}^n)$.

a) Soit $x \in X$. Montrer que l'espace tangent $T_x X$ est égal à \mathbb{R}^n .

b) Montrer que $X = \mathbb{R}^n$. *Ind.* On pourra raisonner par l'absurde.

Probabilités

807. Soient $n \geq 2$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

a) Déterminer $\mathbf{E}(\mathrm{card}(X))$.

b) Déterminer $\mathbf{E}(\mathrm{card}(X \cap Y))$.

808. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p < n$. On considère une urne contenant p boules blanches et $n - p$ boules noires. On effectue des tirages sans remise des boules de l'urne. Donner la loi et l'espérance de la variable donnant le rang de la dernière boule blanche tirée.

809. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . On dit que X est *sans mémoire* si : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X > n) > 0$ et $\mathbf{P}(X > m + n \mid X > n) = \mathbf{P}(X > m)$.

a) Soit $p \in]0, 1[$. On suppose que $X \sim \mathcal{G}(p)$. Montrer que X est sans mémoire.

b) On suppose que X est sans mémoire.

i) Montrer que $\mathbf{P}(X > 0) = 1$, puis que : $\exists p \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X > n) = (1 - p)^n$.

ii) Montrer que $X \sim \mathcal{G}(p)$.

810. On considère une urne contenant deux fois plus de boules noires que de blanches. On y effectue des tirages avec remise, et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux boules noires consécutives. Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_n = \mathbf{P}(X > n)$.

a) Montrer que $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$ pour tout $n \geq 0$.

b) En déduire la loi de X .

c) Montrer que X admet des moments de tout ordre, et calculer son espérance.

811. Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une urne contenant des boules blanches et noires, avec une proportion p de boules blanches. On effectue des tirages successifs avec remise. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de tirages à effectuer pour obtenir n boules blanches.

a) Déterminer la loi de X_1 et sa fonction génératrice.

b) Calculer la fonction génératrice de X_n et en déduire sa loi et son espérance.

812. Alice et Bob possèdent chacun un sac avec n jetons numérotés de 1 à n . Alice tire un jeton au hasard. Bob tire ensuite des jetons, sans remise, jusqu'à ce que le numéro tiré soit supérieur ou égal au numéro tiré par Alice. On note Y le nombre de jetons tirés par Bob. Déterminer la loi de Y .

813. On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$.

a) Montrer que cette relation définit une loi de probabilité.

b) Calculer la fonction génératrice de X .

c) Calculer l'espérance de X .

814. Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in]0, 1[\setminus \{1/2\}$. On considère des variables aléatoires X et Y à valeurs dans \mathbb{N} telles que $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X = k, Y = n) = a \frac{(1-p)^{n-k}}{2^n} \mathbf{1}_{k \leq n}$.

a) Calculer a , puis les lois de X et Y .

b) Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de X et Y .

c) Calculer la covariance de X et Y . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

815. Soient $a \in]0, 1[, b > 0$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^2

tel que : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-b} b^i a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} \mathbf{1}_{i \geq j}$.

a) Déterminer les lois de X et Y .

b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

d) Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

816. Soient X, Y des variables aléatoires telles que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y = \frac{1}{X+1}$.
Calculer $\mathbf{E}(Y)$.

817. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

- a) Calculer la probabilité que X soit paire.
b) On pose $Y = (-1)^X$. Espérance et loi de Y .

818. Soit X une variable aléatoire à valeurs entières ayant un moment d'ordre 2.

Montrer que $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) \leq 1 - \frac{2}{3}\mathbf{E}(X) + \frac{1}{6}\mathbf{E}(X^2)$ et caractériser l'égalité.

819. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

a) Montrer que : $\forall t \in [0, 1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k) t^k = \frac{1 - G_X(t)}{1 - t}$.

b) On suppose que X^2 est d'espérance finie.

Montrer que : $\forall t \in [0, 1]$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k) t^k \geq \frac{3-t}{2}\mathbf{E}(X) + \frac{t-1}{2}\mathbf{E}(X^2)$.

820. On considère deux compartiments séparés par une valve. À l'instant $t = 0$, le compartiment A contient $2N$ particules et le second est vide. On ouvre la valve. À chaque instant, de manière équiprobable, une des $2N$ particules passe d'un compartiment à l'autre. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de particules dans le compartiment A à l'instant n .

a) Soit $k \in \llbracket 0, 2N \rrbracket$. Trouver une relation entre $\mathbf{P}(X_n > k)$, $\mathbf{P}(X_{n-1} > k+1)$, $\mathbf{P}(X_{n-1} = k+1)$ et $\mathbf{P}(X_{n-1} = k)$.

b) En déduire que, pour $n \geq 1$, $\mathbf{E}(X_n) = 1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbf{E}(X_{n-1})$.

c) Déterminer $\mathbf{E}(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X_n)$.

821. Une urne contient r boules rouges et b boules blanches. À chaque tirage, on pioche une boule dans l'urne et on remet la boule tirée dans l'urne si et seulement si elle est rouge. On note $E_{n,b}$ l'espérance du nombre de boules blanches tirées à l'issue de n tirages (on considère r comme fixé définitivement).

a) Montrer que $F : (u, v) \in]-1, 1[^2 \mapsto \sum_{(n,b) \in (\mathbb{N}^*)^2} E_{n,b} u^n v^b$ est convenablement définie.

b) Montrer la relation $(b+r)E_{n,b} = b + bE_{n-1,b-1} + rE_{n-1,b}$ (si $b > 0$ et $n > 0$).

c) Montrer que $\partial_2 F$ est bien définie sur $] -1, 1[$ et que

$$\forall (u, v) \in] -1, 1[^2, v \partial_2 F(u, v) + r F(u, v) = \frac{uv}{(1-u)^2(1-v)^2}.$$

822. a) Montrer que le polynôme $P = X^3 - X^2 - X - 1$ admet une unique racine réelle et deux racines complexes non réelles de module strictement inférieur à 1.

b) On lance une pièce équilibrée. Pour $n \geq 3$, A_n est l'événement « obtenir trois pile consécutifs pour la première fois à l'instant n ».

Déterminer une relation de récurrence d'ordre 3 vérifiée par la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n \geq 3}$ et en déduire sa limite.

823. On lance simultanément $n \in \mathbb{N}^*$ fois deux pièces équilibrées. Soit E_n l'événement « les deux pièces donnent le même nombre de pile ».

a) i) Pour $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $a + b \leq n$, montrer que
$$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

ii) Calculer $\mathbf{P}(E_n)$.

b) On note N le nombre de fois où les pièces ont donné le même nombre de pile au cours des n lancers. Calculer $\mathbf{E}(N)$.

824. On donne la formule du crible de Poincaré : si A_1, \dots, A_p sont des ensembles finis alors

$$\text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_p) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \text{card } A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}.$$

a) On munit S_n de la probabilité uniforme. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points fixes d'une permutation de S_n .

b) Calculer $\mathbf{P}(X = 0)$.

c) Déterminer la loi de X .

d) Démontrer la formule de Poincaré.

825. Une pièce tombe sur pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. On la lance jusqu'à obtenir pile, et on note N le nombre de lancers effectués. On relance alors N fois la pièce, et on note X le nombre de pile obtenus. Déterminer la loi de N , celle de X et calculer $\mathbf{E}(X)$.

826. On dispose de n chapeaux et n tiroirs. On range aléatoirement chaque chapeau dans un des tiroirs (chaque tiroir pouvant contenir jusqu'à n chapeaux). On note X_k la variable aléatoire donnant le numéro du tiroir dans lequel est rangé le chapeau numéro k . On note Z_n la variable aléatoire donnant le nombre de tiroirs vides à l'issue du rangement.

a) Calculer l'espérance et la variance de Z_n .

b) Déterminer un équivalent de $\mathbf{E}(Z_n)$ et de $\mathbf{V}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

827. a) Donner la loi d'une somme de n variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

b) On lance un dé qui a une probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber sur 6. On note X le nombre de lancers nécessaires pour avoir n fois 6. Déterminer la loi et l'espérance de X .

828. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

a) Calculer l'espérance et la variance de $\frac{(X+1)^2}{X}$, notamment en fonction de $\int_p^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du$.

b) Calculer l'espérance de $\frac{(X+1)^2}{Y}$ et de $(X+1)^2 Y$.

c) Les variables aléatoires $\frac{(X+1)^2}{Y}$ et $(X+1)^2Y$ sont-elles indépendantes?

829. Soit X une variable aléatoire telle que $X+1 \sim \mathcal{G}(p)$.

a) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$. Montrer que $\frac{1-x^{nm}}{1-x^m} \leq \frac{1-x^n}{1-x}$.

b) Les événements « m divise X » et « n divise X » sont-ils indépendants? On pourra commencer par le cas $n \wedge m = 1$.

830. Soient $a, b > 0$ et X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n+1) = a\mathbf{P}(X = n) + b^{n+1}$.

a) Montrer que a, b sont strictement inférieurs à 1 et expliciter la loi de X .

b) Calculer $\mathbf{E}(X)$.

831. Soit (E_k) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Montrer l'existence d'un réel ℓ tel que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k}{n} + E_k \right) - \ell \right| > \alpha \right) = 0.$$

832. a) Donner une condition sur le couple $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} telle que $\mathbf{P}(X = n) = r \binom{2n}{n} s^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose dans la suite cette condition vérifiée et on se donne une telle variable X .

b) Montrer que G_X est solution sur $[0, 1]$ de l'équation différentielle $(1-4st)y'(t) = 2sy(t)$.

c) En déduire l'espérance et la variance de X .

833. a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} vérifiant $\forall t \in [0, 1], G_X(t) = \frac{1}{(2-t)^\alpha}$.

b) Calculer l'espérance et la variance de X et montrer que $\mathbf{P}(X = n) = O\left(\frac{n^{\lfloor \alpha \rfloor}}{2^n}\right)$.

834. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p . On introduit $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$. Calculer $\mathbf{P}(Y \geq k)$ et $\mathbf{P}(Y = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer que Y est d'espérance finie.

835. Pour $n \geq 2$, soit X_n une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{\ln(k)}{\ln(n!)}$. Déterminer un équivalent de $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

836. Soient a et b dans \mathbb{R} avec $a < b$. Quelle est la variance maximale d'une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$?

837. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ bornée et X une variable aléatoire réelle.

Montrer que : $(\mathbf{E}(f(X)^n))^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup \{f(x) ; x \in \mathbb{R}, \mathbf{P}(X = x) > 0\}$.

838. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques de paramètres respectifs p et q .

a) Calculer la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

b) Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) soit vecteur propre de A .

839. Une matrice est dite à spectre simple lorsque toutes ses valeurs propres sont de multiplicité 1.

a) Soit $M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$, où $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M n'est pas à spectre simple. Montrer que M possède un vecteur propre dont le dernier coefficient est nul.

b) En déduire que A possède un vecteur propre orthogonal à b .

c) Soient X_1, \dots, X_5 des variables i.i.d. de Bernoulli de paramètre p . Montrer que la pro-

babilité que la matrice aléatoire $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_5 & X_2 \\ 0 & X_5 & -1 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ soit à spectre simple est

supérieure ou égale à $3p^3 - 2p^4$.

840. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice $J = (J_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $J_{i+1,i} = 1$, $J_{1,n} = 1$ et $J_{i,j} = 0$ sinon.

a) Calculer le polynôme caractéristique de J ainsi que son polynôme minimal.

Soient X_0, \dots, X_{n-1} des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose $M = \begin{pmatrix} X_0 & X_{n-1} & \cdots & \cdots & X_1 \\ X_1 & X_0 & \ddots & & X_2 \\ X_2 & X_1 & X_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X_{n-1} \\ X_{n-1} & \cdots & X_2 & X_1 & X_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Exprimer M en fonction de J .

c) On suppose dans cette question que $n = 2$. Calculer $\mathbf{P}(M \in \text{GL}_2(\mathbb{C}))$.

d) Déterminer le spectre de M .

e) On suppose que n est premier et on admet qu'alors le polynôme $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ est irréductible sur \mathbb{Q} . Déterminer $\mathbf{P}(M \in \text{GL}_n(\mathbb{C}))$.

841. Soient X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, $U = (X_1 \cdots X_n)$ et $M = U^T U$.

a) Déterminer la loi de $\text{rg}(M)$ et de $\text{tr}(M)$.

b) Calculer la probabilité de l'événement « M est un projecteur ».

c) Ici $n = 2$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $S = V M V^T$. Déterminer l'espérance et la variance de S .

842. Soient $n \geq 2$ entier, et V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension k . On note p_V la projection orthogonale sur V , M sa matrice dans la base canonique. On écrit $M = D + A$ où D est diagonale et A a tous ses coefficients diagonaux nuls. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire dont les composantes X_i suivent la loi de Rademacher et sont indépendantes. Soit enfin $R = d(X, V)$.

- Montrer que $0 \leq R \leq \sqrt{n}$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, d(x, V)^2 = \|x\|^2 - \langle x, p_V(x) \rangle$.
- Montrer que $R^2 = n - k - X^T A X$ et calculer l'espérance de R^2 .
- Montrer que $\text{tr}(D^2) \geq \frac{k^2}{n}$.
- Calculer l'espérance de $(X^T A X)^2$.

843. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour $n \geq 1$, on pose $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

- Donner une expression de $\mathbf{E}(M_n)$.
- Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto 1 - (1 - q^t)^n$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente, et en donner un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$.
- Donner un équivalent de $\mathbf{E}(M_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

844. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Soit $h > 0$. On définit la suite de fonctions $(u_n^h)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0^h = f$ et, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $u_{n+1}^h(x) = \frac{u_n^h(x+h) - u_n^h(x)}{h}$.

- Exprimer u_n^h à l'aide de f .
- On pose $a_n^h = u_n^h(0)$ et $S(x, h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^h x^k}{k!}$, où $x \geq 0$. Montrer que $S(x, h)$ est bien définie.
- Exprimer $S(x, h)$ à l'aide de la variable aléatoire X_h , où $X_h \sim \mathcal{P}\left(\frac{x}{h}\right)$.
En déduire $\lim_{h \rightarrow 0^+} S(x, h)$.

845. Soient $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $]0, 1[$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout n , $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$. Montrer que $A = \{\omega, X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty\}$ est un événement, et calculer sa probabilité en fonction de (p_n) .

846. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- Calculer $\mathbf{E}(e^{tS_n})$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.
- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathbf{P}(|S_n| \geq na) \leq 2 \exp\left(-\frac{na^2}{2}\right)$.
- Montrer que le résultat de la question précédente subsiste si on suppose que $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires centrées et bornées par 1.

847. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. suivant la loi de X . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $\mathbf{E} \left(f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\mathbf{E}(X))$.

848. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs réelles et admettant un moment d'ordre 4.

On note $m = \mathbf{E}(X_1)$, $V_2 = \mathbf{E}((X_1 - m)^2)$ et $V_4 = \mathbf{E}((X_1 - m)^4)$.

Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement $A_n^\varepsilon = \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m \right| \geq \varepsilon \right\}$.

a) Majorer $\mathbf{P}(A_n^\varepsilon)$ en fonction de ε , V_2 et V_4 .

b) Montrer que la série $\sum \mathbf{P}(A_n^\varepsilon)$ converge.

c) Montrer que $\mathbf{P} \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k^\varepsilon \right) = 0$.

849. Soient $p, \alpha \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$ et $\beta = 1 - \alpha$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. On pose :

$A = \left\{ \omega \in \Omega ; \sum \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge} \right\}$ et $A_\beta = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} (X_n \leq n^\beta)$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\mathbf{P} \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta) \right) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta - 1}$.

b) Montrer que $\mathbf{P}(\overline{A_\beta}) = 0$.

c) Calculer $\mathbf{P}(A)$.

850. Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que $\sum \lambda_n$ converge. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$ pour tout $n \geq 1$.

a) Montrer que $\sum \mathbf{P}(X_n \neq 0)$ converge.

b) Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} (X_k \neq 0)$ est un événement négligeable.

c) Montrer que $\sum X_n$ converge presque sûrement. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ et on admettra dans la suite qu'il s'agit d'une variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).

d) Soient Y et Z deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} .

Montrer que $\forall t \in [0, 1]$, $|G_Y(t) - G_Z(t)| \leq 2 \mathbf{P}(Y \neq Z)$.

e) Montrer que $S \sim \mathcal{P}(\theta)$ pour $\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n$.