

# Mines-Ponts 2026 — Mathématiques 2

FILIÈRES MP – MPI

Un corrigé – J. Larochette – Lycée Leconte de Lisle, la Réunion

## Autour de $O_n(\mathbf{R})$ et de $SL_n(\mathbf{R})$

### I – Quelques propriétés de $O_n(\mathbf{R})$

1 ▷ Soit  $\theta \in \mathbf{R}$ . On calcule

$$\chi_{R_\theta} = X^2 - \operatorname{tr}(R_\theta)X + \det R_\theta = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).$$

■ On en conclut déjà que  $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ,

•  $\operatorname{Sp}_{\mathbf{R}} R_\theta = \emptyset$  et  $R_\theta$  n'est pas  $\mathbf{R}$ -diagonalisable.

•  $\operatorname{Sp}_{\mathbf{C}} R_\theta = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$  contient deux nombres complexes distincts en dimension 2, donc  $R_\theta$  est  $\mathbf{C}$ -diagonalisable.

■ Supposons désormais que  $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$ . Alors  $R_\theta \in \{I_2, -I_2\}$  est  $\mathbf{R}$ -diagonalisable et  $\mathbf{C}$ -diagonalisable.

2 ▷ ■ On vérifie déjà que toute matrice  $R_\theta$  est orthogonale (ses colonnes sont orthonormales) et de déterminant 1, donc appartient à  $SO_2(\mathbf{R})$ .

■ Réciproquement, si  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbf{R})$ , alors

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

Des deux premières équations, on tire des réels  $\theta$  et  $\phi$  tels que

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \phi \\ \sin \theta & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

La troisième équation donne alors

$$0 = \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi = \sin(\theta + \phi).$$

On a donc

$$\phi \equiv -\theta \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad \phi \equiv \pi - \theta \pmod{2\pi}$$

Dans le premier cas,  $M = R_\theta$  est bien de déterminant 1, tandis que dans le second cas,  $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$  est de déterminant  $-1$ , ce qui est exclu.

■ On a donc bien  $SO_2(\mathbf{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbf{R}\}$ .

3 ▷ ■ Comme  $M_n(\mathbf{R})$  est de dimension finie, pour montrer que  $O_n(\mathbf{R})$  est compact, il suffit de montrer qu'il est fermé et borné pour n'importe quelle norme.

Or  $O_n(\mathbf{R})$  est fermé comme image réciproque du fermé  $\{I_n\}$  par l'application continue  $M \mapsto M^T M$  (la bilinéarité du produit matriciel et la linéarité de la transposition sur un espace de dimension finie en assurent la continuité) et bornée car, avec la norme euclidienne  $\|M\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(M^T M)}$ , on a  $O_n(\mathbf{R}) \subset \overline{B}_2(0, \sqrt{n})$ . Ou alors avec la norme  $\|M\|_\infty = \max_{i,j} |m_{i,j}|$ ,  $O_n(\mathbf{R}) \subset \overline{B}_\infty(0, 1)$  car les colonnes sont normées.

- $O_n(\mathbf{R})$  n'est pas connexe par arcs car  $\det$  est une application continue sur  $M_n(\mathbf{R})$  (elle est polynomiale en les coefficients de la matrice) et  $\det(O_n(\mathbf{R})) = \{-1, 1\}$  n'est pas connexe par arcs.

- 4 ▷ ■ Comme l'application  $f : \theta \mapsto R_\theta$  est continue sur  $\mathbf{R}$ ,  $SO_2(\mathbf{R}) = f(\mathbf{R})$  est une image continue du connexe par arcs  $\mathbf{R}$  donc  $SO_2(\mathbf{R})$  est connexe par arcs.

On aurait aussi pu relier continûment  $R_\theta$  à  $I_2$ , deux matrices de  $SO_2(\mathbf{R})$ , avec  $g_\theta : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow SO_2(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto R_{t\theta} \end{cases}$  et conclure par transitivité.

- Traitons le cas général. Une matrice  $M \in SO_n(\mathbf{R})$  est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont soit de la forme  $R_\theta$ , soit des réels 1 ou  $-1$ .

Comme le déterminant est positif, une telle matrice comporte un nombre pair de  $-1$ .

En les rassemblant deux par deux, on fait apparaître des blocs  $R_\pi$ .

Ainsi, une forme réduite de  $M$  est une matrice diagonale par blocs de la forme

$$D = \text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_q}, I_p).$$

Soit  $P \in O_n(\mathbf{R})$  tel que  $M = PDP^T$ .

Considérons l'application

$$h : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow SO_n(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto P \text{diag}(g_{\theta_1}(t), \dots, g_{\theta_q}(t), I_p) P^T \end{cases}$$

où pour tout  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $g_{\theta_k}$  est un chemin continu dans  $SO_2(\mathbf{R})$  reliant  $I_2$  à  $R_{\theta_k}$ .

La continuité de  $h$  provient de celle des applications  $g_{\theta_k}$  ainsi que de celle de  $A \mapsto PAP^T$  qui est linéaire sur un espace de dimension finie.

Ainsi, toute matrice de  $SO_n(\mathbf{R})$  est reliée continûment à  $I_n \in SO_n(\mathbf{R})$  donc, par transitivité, à toute autre matrice de  $SO_n(\mathbf{R})$ .

Finalement,  $SO_n(\mathbf{R})$  est connexe par arcs.

- 5 ▷ Soit  $H$  un sous-groupe de  $(O_n(\mathbf{R}), \times)$  contenant  $SO_n(\mathbf{R})$ .

Supposons que  $H \neq SO_n(\mathbf{R})$ . On a alors  $M \in O_n(\mathbf{R}) \setminus SO_n(\mathbf{R})$  tel que  $M \in H$ .

Soit  $A \in O_n(\mathbf{R}) \setminus SO_n(\mathbf{R})$ .

Alors  $A = (A \times M) \times M^{-1}$  avec  $B = A \times M \in SO_n(\mathbf{R}) \subset H$  (il s'agit d'une matrice orthogonale de déterminant positif). Or  $M \in H$  donc  $A = B \times M^{-1} \in H$  car c'est un sous-groupe.

Finalement,  $H = O_n(\mathbf{R})$ .

On a donc deux sous-groupes de  $(O_n(\mathbf{R}), \times)$  contenant  $SO_n(\mathbf{R})$  :  $O_n(\mathbf{R})$  et  $SO_n(\mathbf{R})$ .

- 6 ▷ ■ Il y a exactement 6 matrices  $2 \times 2$  inversibles à coefficients dans  $\{0, 1\}$  parmi les 16 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Les matrices ayant 0, 3 ou 4 zéros, ou une colonne de zéros sont non inversibles.) Or, par indépendance,

$$P\left(Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = P\left(Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = p^2(1-p)^2$$

et

$$P\left(Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = P\left(Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = P\left(Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = P\left(Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = p^3(1-p).$$

Ainsi,  $P(Z_2 \in GL_2(\mathbf{R})) = 2p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) = 2p^2(1-p)(1+p) = 2p^2(1-p^2)$ .

- Comme les colonnes doivent être orthonormées, une matrice orthogonale à coefficients dans  $\{0, 1\}$  est une matrice ayant dans chaque ligne et chaque colonne exactement un coefficient non nul valant 1 (appelée matrice de permutation).

Il y en a exactement  $n!$  (correspondant au nombre de permutations possibles des colonnes de  $I_n$ ), et la probabilité que  $Z_n$  vaille n'importe laquelle de ces matrices est, par indépendance,  $p^n(1-p)^{n^2-n}$ .

Donc  $P(Z_n \in O_n(\mathbf{R})) = n!p^n(1-p)^{n^2-n}$ .

- Le déterminant d'une matrice obtenue par permutation des colonnes de  $I_n$  avec  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  est sa signature  $\varepsilon(\sigma)$  (c'est le caractère anti-symétrique du déterminant par rapport à ses colonnes).

Donc les matrices orthogonales positives sont celles correspondant aux permutations paires.

Or il y a le même nombre de permutations paires que de permutations impaires dans  $\mathfrak{S}_n$ . En effet, si on note  $\mathfrak{A}_n$  l'ensemble des permutations paires, et si  $\tau$  est une transposition (cela fonctionne aussi avec n'importe quelle autre permutation impaire),

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \tau \end{cases}$$

est une bijection de réciproque

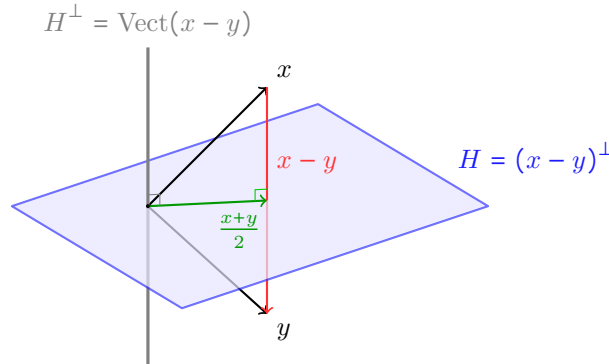
$$\begin{cases} \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n & \longrightarrow & \mathfrak{A}_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \tau^{-1} (= \sigma \circ \tau) \end{cases}$$

Donc  $|\mathfrak{A}_n| = |\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2}$ .

Finalement,  $P(Z_n \in \text{SO}_n(\mathbf{R})) = \frac{n!}{2} p^n (1-p)^{n^2-n}$ .

7 ▷ Soient  $x, y \in E$  tels que  $\|x\| = \|y\|$ .

- Si  $x = y$ , on peut considérer la réflexion  $s$  par rapport à un hyperplan contenant  $x$  et  $y$ , qui envoie  $x$  sur  $x = y$ .
- Sinon, faire un dessin nous encourage à introduire la réflexion  $s$  par rapport à l'hyperplan  $H = (x - y)^\perp$  (autrement dit l'hyperplan médiateur de  $x$  et  $y$ ).



Comme

$$x = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y)$$

avec  $\frac{1}{2}(x - y) \in H^\perp$  par définition de  $H$  et  $\frac{1}{2}(x + y) \in H$  car  $(x - y | x + y) = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$ , on a

$$s(x) = \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}(x - y) = y.$$

Dans les deux cas, il suffit de choisir pour  $A$  la matrice dans la base canonique de  $s$ .

8 ▷ Cette question n'utilise pas la compacité de  $\mathcal{G}$ .

- Remarquons que  $G_0 = I_n \in \mathcal{G}$  convient.
- Comme  $\| \|Gx\| x \| = \|Gx\|$ , d'après la question précédente, on a une matrice de réflexion  $A \in O_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{G}$  telle que  $(AG)x = A(Gx) = \|Gx\| x$ . On peut donc poser  $G_1 = AG \in \mathcal{G}$ .
- On pose alors, pour  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $G_p = G_1^p \in \mathcal{G}$  ( $G_1$  étant bien inversible comme membre de  $\mathcal{G}$ ).

Pour  $p \in \mathbf{N}$ , on a déjà  $G_p x = \|Gx\|^p x$  pour  $p \in \{0, 1\}$  et si on suppose, pour  $p \geq 1$ , l'identité vérifiée, alors

$$G_{p+1}x = G_1(G_p x) = \|Gx\|^p G_1 x = \|Gx\|^{p+1} x$$

ce qui établit la récurrence.

Reste à vérifier la relation pour  $p < 0$ . Remarquons que  $\|Gx\| \neq 0$ , car  $x \neq 0_E$  et  $G \in \mathcal{G}$  est inversible.

Or, de  $G_1x = \|Gx\|x$ , on tire  $G_1^{-1}x = \|Gx\|^{-1}x$  et avec une récurrence en tous points similaire à la précédente, on tire que pour tout  $q > 0$ ,  $(G_1^{-1})^q x = (\|Gx\|^{-1})^q x$ .

On a donc bien pour tout  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $G_1^p x = \|Gx\|^p x$ .

**9**  $\triangleright$  On reprend les notations de la question précédente.

On sait que  $\mathcal{G}$  est compact, donc borné. Considérons  $\|\cdot\|$ , norme matricielle subordonnée à  $\|\cdot\|$ .

Alors on a  $M \in \mathbf{R}^+$  tel que pour tout  $g \in \mathcal{G}$ ,  $\|g\| \leq M$ . En particulier, pour tout  $p \in \mathbf{Z}$ , comme  $\|x\| = 1$ ,

$$\|G_p x\| \leq \|G_p\| \leq M.$$

Ainsi,

$$M \geq \|G_p x\| = \| \|Gx\|^p x \| = \|Gx\|^p.$$

On montre que  $\|Gx\| = 1$ . Si ce n'était pas le cas, on aurait soit  $\|Gx\| > 1$  et une contradiction en faisant  $p \rightarrow +\infty$ , soit  $\|Gx\| < 1$  et une contradiction en faisant  $p \rightarrow -\infty$ .

On en déduit que

$$\|x\| = 1 \implies \|Gx\| = 1.$$

Ainsi, pour tout  $x \neq 0$ , comme  $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ ,

$$\frac{\|Gx\|}{\|x\|} = \left\| G \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1.$$

Finalement, pour tout  $x \in E$  (y compris  $0_E$ ),  $\|Gx\| = \|x\|$ , donc  $G$  matrice d'isométrie, et donc  $G \in O_n(\mathbf{R})$ .

Comme  $G$  était un élément quelconque de  $\mathcal{G}$  et comme  $O_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{G}$ , on conclut que  $\mathcal{G} = O_n(\mathbf{R})$ .

## II – Calcul différentiel sur $O_n(\mathbf{R})$ et $SL_n(\mathbf{R})$

**10**  $\triangleright$  Comme tous les coefficients de  $f(M)$  sont polynomiaux en ceux de  $M$ ,

$$\text{f est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ (et même } \mathcal{C}^\infty) \text{ sur } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

$T : M \mapsto M^\top$  est linéaire donc différentiable en toute matrice  $M$  et  $dT(M) = T$ .

Alors, par bilinéarité du produit matriciel, on retrouve la différentiabilité de  $f$  et pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ,

$$df(M) : H \mapsto dT(M)(H)M + T(M)H = H^\top M + M^\top H.$$

On peut aussi le retrouver à la main en écrivant

$$(M + H)^\top (M + H) = M^\top M + M^\top H + H^\top M + H^\top H$$

avec  $H \mapsto M^\top H + H^\top M$  linéaire et, en choisissant une norme sous-multiplicative (elles sont toutes équivalentes),

$$0 \leq \|H^\top H\| \leq \|H^\top\| \|H\| \text{ donc } \frac{\|H^\top H\|}{\|H\|} \rightarrow 0 \text{ et } H^\top H = o(H).$$

**11**  $\triangleright$  Soit  $H \in T$ . On a  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow O_n(\mathbf{R})$  dérivable en 0 tel que  $\gamma(0) = I_n$  et  $\gamma'(0) = H$ .

Mais alors, pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $f(\gamma(t)) = I_n$ , donc, en dérivant en 0,

$$0 = df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = df(I_n)(H) = H^\top + H.$$

Ainsi,  $T \subset \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ .

**12** ▷ Soient, pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $H_i \in T$ ,  $\varepsilon_i \in \mathbf{R}_*^+$ ,  $\gamma_i : ]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[ \rightarrow \text{O}_n(\mathbf{R})$ , tel que  $\gamma_i(0) = I_n$  et  $\gamma_i'(0) = H_i$ . Alors, si  $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,

$$\gamma : \left. \begin{array}{l} ]-\varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow \text{O}_n(\mathbf{R}) \\ t \longmapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t) \end{array} \right\}$$

est bien définie car  $\text{O}_n(\mathbf{R})$  est un groupe multiplicatif, dérivable par opération en 0 et vérifiant  $\gamma(0) = I_n$  et  $\gamma'(0) = \gamma_1'(0)\gamma_2(0) + \gamma_1(0)\gamma_2'(0) = H_1 + H_2$ , donc  $H_1 + H_2 \in T$ .

Puis, si  $\lambda \in \mathbf{R}^*$ ,  $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1}{|\lambda|} > 0$ ,

$$\gamma_3 : \left. \begin{array}{l} ]-\varepsilon_3, \varepsilon_3[ \longrightarrow \text{O}_n(\mathbf{R}) \\ t \longmapsto \gamma_1(\lambda t) \end{array} \right\}$$

est bien définie, dérivable par opération en 0 et vérifiant  $\gamma_3(0) = I_n$  et  $\gamma_3'(0) = \lambda\gamma_1'(0) = \lambda H_1$ , donc  $\lambda H_1 \in T$ .

Il reste à voir que  $0_n \in T$  en considérant  $\gamma : t \in ]-1, 1[ \mapsto I_n$ .

Comme, de plus,  $T$  est inclus dans l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , par caractérisation des sous-espaces vectoriels,

$$(T, +, \cdot) \text{ est un espace vectoriel.}$$

**13** ▷ On a déjà vu que  $T \subset \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ . Montrons que l'inclusion réciproque est vraie.

Soit  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ . L'idée astucieuse consiste à utiliser l'exponentielle de matrice. Considérons

$$\gamma : \left. \begin{array}{l} ]-1, 1[ \longrightarrow \text{O}_n(\mathbf{R}) \\ t \longmapsto \exp(tA) \end{array} \right\}$$

Elle est bien définie car pour tout  $t \in ]-1, 1[$ , en utilisant la continuité de la transposition (qui est linéaire sur un espace de dimension finie),

$$\exp(tA)^\top = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right)^\top = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} (A^\top)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} A^k = \exp(-tA) = \exp(tA)^{-1}$$

De plus, elle est dérivable en 0, avec  $\gamma(0) = I_n$  et  $\gamma'(0) = A \exp(0 \cdot A) = A$ . On en conclut que  $A \in T$ .

Finalement,  $T = \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ .

*Remarque : on n'a pas utilisé la question précédente, mais on retrouve bien le fait que  $T$  soit un espace vectoriel.*

**14** ▷ Soit  $p \in \mathbf{N}^*$  et  $M_p = \text{diag}\left(p, \frac{1}{p}, 1, \dots, 1\right) \in \text{SL}_n(\mathbf{R})$ .

Alors  $g(M_p) = \text{tr}\left(\text{diag}\left(p^2, \frac{1}{p^2}, 1, \dots, 1\right)\right) = p^2 + \frac{1}{p^2} + n - 2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc  $g$  n'admet pas de maximum global.

**15** ▷ ■ Comme  $g$  et  $\det$  sont deux fonctions polynomiales en les coefficients de  $M$ , elles sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  (et même  $\mathcal{C}^\infty$ ).

■ Comme pour toute  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ,  $g(M) = \sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} m_{i,j}^2$ , on a, avec des notations évidentes, pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial m_{i,j}}(M) = 2m_{i,j}, \text{ donc } \nabla g(M) = 2M.$$

■ On peut aussi remarquer que  $g = \text{tr} \circ f$  donc pour toutes matrices  $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ,

$$dg(M)(H) = d \text{tr}(f(M))(df(M)(H)) = \text{tr}(H^\top M + M^\top H) = 2 \text{tr}(M^\top H) = \left(2M \middle| H\right)$$

en utilisant la linéarité de la trace, donc sa différentielle en tout point est elle-même, et le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Par définition, on a bien  $\nabla g(M) = 2M$ .

■ Pour calculer la dérivée partielle de  $\det$  selon  $m_{i,j}$ , on utilise un développement par rapport à la ligne  $i$  :

$$\det M = \sum_{k=1}^n m_{i,k} C_{i,k} \text{ où les cofacteurs } C_{i,k} \text{ ne dépendent pas de } m_{i,j}.$$

$$\text{Il vient } \frac{\partial \det}{\partial m_{i,j}} = C_{i,j} = [\text{Com } M]_{i,j} \text{ pour tout } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ et donc } \nabla \det(M) = \text{Com } M.$$

**16** ▷ On va appliquer le théorème d'optimisation sous contrainte : les fonctions  $g$  et  $h : M \mapsto \det M - 1$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , et pour toute matrice  $M \in \text{SL}_n(\mathbf{R})$ ,  $\nabla h(M) = \text{Com } M \neq 0_n$  car  $\det M = 1$ , donc  $M$  est inversible, et, d'après la formule de la comatrice,  $\text{Com } M = (M^{-1})^\top = (M^\top)^{-1}$  l'est aussi.

Ce théorème assure, si  $M$  est un extremum local de  $g$ , l'existence de  $\mu \in \mathbf{R}$  tel que  $\nabla g(M) = \mu \nabla h(M)$ , c'est-à-dire  $2M = \mu \text{Com } M$ .

En posant  $\lambda = \frac{\mu}{2}$ , on obtient  $M = \lambda \text{Com } M$ .

On a alors, toujours avec la formule de la comatrice,  $M = \lambda (M^\top)^{-1}$ , donc  $MM^\top = \lambda I_n$ .

En prenant le déterminant, on obtient  $1 = \lambda^n$ , et, comme  $\lambda$  est réel,  $\lambda \in \{-1, 1\}$ .

Or, si on avait  $\lambda = -1$ , on aurait  $g(M) = \text{tr}(M^\top M) = \text{tr}(MM^\top) = -n < 0$ , ce qui est embêtant pour une norme au carré. C'est donc que  $\lambda = 1$  et  $M \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$ .

**17** ▷  $g$  est une fonction positive (carré de la norme euclidienne usuelle  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ ) sur le fermé  $\text{SL}_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\{1\})$  avec  $\det$  continue.

Comme  $g(M) = \|M\|_2^2 \xrightarrow{\|M\|_2 \rightarrow +\infty} +\infty$ , on a  $r \in \mathbf{R}_*^+$  tel que si  $\|M\|_2 \geq r$ ,  $g(M) \geq g(I_n)$ .

Soit  $R = \max(r, \|I_n\|_2) = \max(r, \sqrt{n})$ .

$$K = \text{SL}_n(\mathbf{R}) \cap \overline{B}_2(0_n, R)$$

est fermé et borné dans l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , c'est un compact. La continuité de  $g$  et le théorème des bornes atteintes assurent l'existence d'un minimum global de  $g$  sur  $K$ . Comme  $I_2 \in K$  et comme, si  $\|M\|_2 > g$ ,  $g(M) \geq g(I_2)$ , il s'agit d'un minimum global de  $g$  sur  $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ .

Or, d'après la question précédente, le seul extremum local possible pour  $g$  sur  $\text{SL}_n(\mathbf{R})$  est  $n$ , atteint exactement en les  $M \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$  (pour une telle matrice, on a bien  $g(M) = n$ ).

Ainsi  $n$  est le minimum global de  $g$  sur  $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ , atteint exactement en les  $M \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$ .

*Remarque : on peut montrer que  $n$  est le minimum global de  $g$  sur  $\text{SL}_n(\mathbf{R})$  directement grâce à la très classique inégalité arithmético-géométrique.*

En effet, prenons  $M \in \text{SL}_n(\mathbf{R})$ . On a alors  $\det M = 1$  et, classiquement,  $M^\top M \in \text{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ . En effet,

- $(M^\top M)^\top = M^\top M$ ,

- et si  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ ,  $X^\top M^\top M X = (MX)^\top MX = \|MX\|^2 > 0$  car  $X \neq 0$  et  $M$  inversible.

On montre alors l'inégalité classique

$$\frac{\text{tr}(M^\top M)}{n} \geq \sqrt[n]{\det(M^\top M)}.$$

Pour cela, on orthodiagonalise  $M^\top M = PDP^\top$  où  $P \in \text{O}_n(\mathbf{R})$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec

$$\text{Sp}(M^\top M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbf{R}_*^+.$$

Alors

$$g(M) = \text{tr } D = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

L'inégalité de Jensen appliquée la fonction concave  $\ln$  permet de remonter l'inégalité arithmético-géométrique

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \lambda_k}$$

et de conclure que

$$\frac{g(M)}{n} \geq \sqrt[n]{\det(M^\top M)} = 1$$

et finalement  $g(M) \geq n$ .

Ainsi  $n$  est le minimum global de  $g$  sur  $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ , atteint en toute  $M \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$  (pour retrouver que ce minimum est atteint seulement en ces matrices, on pourrait établir le cas d'égalité de l'inégalité arithmético-géométrique).

### III – Morphismes continus de $\mathbf{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

18 ▷ Soit  $G$  un sous-groupe borné de  $(\mathbf{R}^*, \times)$ . Si  $x \in G$ , pour tout  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $x^p \in G$ .

Comme  $G$  est borné, en faisant  $p \rightarrow +\infty$  ou  $p \rightarrow -\infty$ , comme dans 9, on conclut que  $|x| = 1$ .

Les sous-groupes bornés de  $(\mathbf{R}^*, \times)$  sont donc  $\{1\}$  et  $\{-1, 1\}$ .

Or  $\det \circ \varphi$  est un morphisme de groupe continu par composition de morphismes de groupes continus et  $(\mathbf{U}, \times)$  est un groupe compact, donc  $(\det \circ \varphi)(\mathbf{U})$  est un sous-groupe compact de  $(\mathbf{R}^*, \times)$ .

Mais le cercle unité  $\mathbf{U}$  est connexe par arcs, donc, toujours par continuité,  $(\det \circ \varphi)(\mathbf{U})$  l'est aussi, ce qui exclut  $\{-1, 1\}$ .

Finalement,  $\det(\varphi(\mathbf{U})) = \{1\}$  et  $\varphi(\mathbf{U}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ .

19 ▷ Fixons  $z \in \mathbf{U}$ .

**Première rédaction** Par théorème fondamental de l'algèbre, on peut trigonaliser  $\varphi(z)$  dans  $\mathbf{C}$  :  $\varphi(z) = PTP^{-1}$  où  $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  et  $T$  triangulaire supérieure avec, sur la diagonale, les valeurs propres complexes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $\varphi(z)$ .

Comme  $\varphi(\mathbf{U})$  est borné,  $P^{-1}\varphi(\mathbf{U})P$  l'est aussi (il suffit de choisir une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  pour s'en convaincre, elles sont toutes équivalentes car on travaille en dimension finie, ou d'invoquer la continuité de l'application  $M \mapsto P^{-1}MP$  linéaire sur un espace de dimension finie.)

Or pour tout  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $\varphi(z)^p \in \varphi(\mathbf{U})$  car c'est un groupe, donc la suite  $(T^p)_{p \in \mathbf{Z}}$  est bornée.

Or les coefficients diagonaux de  $T^p$  sont les  $\lambda_k^p$ , ce qui empêche d'avoir  $|\lambda_k| \neq 1$  quitte à faire  $p \rightarrow +\infty$  ou  $p \rightarrow -\infty$ .

Finalement,  $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}} \varphi(z) \subset \mathbf{U}$ .

**Deuxième rédaction** En trigonalisant  $\varphi(z) = PTP^{-1}$  et en choisissant comme norme (on peut, en dimension finie, elle sont toutes équivalentes)  $\|M\| = \|P^{-1}MP\|_{\infty}$ , la suite de matrices  $(\varphi(z)^n)$  à valeurs dans le groupe compact  $\varphi(\mathbf{U})$  est bornée donc pour tout  $\lambda \in \mathrm{Sp} \varphi(z)$ , la suite numérique  $(\lambda^n)$  est bornée et donc, nécessairement  $\lambda \in \mathbf{U}$ .

**Troisième rédaction** On peut considérer seulement une valeur propre complexe  $\lambda$  de  $\varphi(z)$  (nécessairement non nulle) et un vecteur propre complexe  $X \neq 0$  associé. Alors  $\varphi(z)X = \lambda X$  et pour tout  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $\varphi(z)^p X = \lambda^p X$ .

Si  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$  et  $\|\cdot\|$  la norme matricielle subordonnée associée, alors

$$|\lambda|^p \|X\| = \|\lambda^p X\| = \|\varphi(z)^p X\| \leq \|\varphi(z)^p\| \|X\|.$$

Comme  $X \neq 0$ , on peut simplifier par  $\|X\| \neq 0$

$$|\lambda|^p \leq \|\varphi(z)^p\|.$$

Mais pour tout  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $\varphi(z)^p$  appartient au groupe compact  $\varphi(\mathbf{U})$ .

On en déduit que la suite  $(|\lambda|^p)_{p \in \mathbf{Z}}$  est bornée, ce qui interdit d'avoir  $|\lambda| \neq 1$  quitte à faire  $p \rightarrow +\infty$  ou  $p \rightarrow -\infty$ .

On a donc bien  $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}} \varphi(z) \subset \mathbf{U}$ .

20 ▷ On a  $\varphi : (\mathbf{U}, \times) \rightarrow (\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$  et  $\Gamma : \begin{matrix} (\mathbf{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbf{U}, \times) \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{matrix}$  des morphismes de groupes, donc, par composition,  $\Psi = \varphi \circ \Gamma : (\mathbf{R}, +) \rightarrow (\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$  est un morphisme de groupes, ce qui répond à la question.

21 ▷ Comme  $\Psi$  est continue sur  $\mathbf{R}$  par composition de fonctions continues, le théorème fondamental de l'analyse nous donne directement la classe  $\mathcal{C}^1$  de  $F$  sur  $\mathbf{R}$ .

Considérant ensuite le cas particulier où  $\Psi$  est constamment égale à  $I_n$ , on obtient  $F(x) = xI_n$ , donc, pour  $x \neq 0$ ,  $\frac{F(x)}{x} = I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ .

Il est alors naturel, pour généraliser, de considérer, pour  $x \neq 0$ ,

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = \Psi(0) = I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).$$

Or  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\mathbf{R}^*)$  est ouvert par continuité de  $\det$  et car  $\mathbf{R}^*$  est ouvert comme complémentaire du fermé  $\{0\}$ .

On a donc  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in [-\alpha, \alpha] \cap \mathbf{R}^*$ ,  $\frac{F(x)}{x} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$  et donc, avec  $x \neq 0$ ,  $F(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ .

22 ▷ Soit  $x \in \mathbf{R}$ . On calcule

$$\Psi(x)F(\alpha) = \int_0^\alpha \Psi(x)\Psi(s) ds = \int_0^\alpha \Psi(x+s) ds = \int_x^{x+\alpha} \Psi(t) dt$$

par le changement de variable  $t = x + s$ .

Ainsi, comme  $F(\alpha)$  est inversible,  $\Psi(x) = \left( \int_x^{x+\alpha} \Psi(t) dt \right) (F(\alpha))^{-1} = (F(x+\alpha) - F(x))(F(\alpha))^{-1}$ .

Par opérations, en utilisant la question précédente, on a bien  $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ .

23 ▷ Posons  $M = \Psi'(0)$ . En dérivant la relation  $\Psi(x) = (F(x+\alpha) - F(x))(F(\alpha))^{-1}$  (ce qui est licite), on trouve, pour  $x \in \mathbf{R}$ , en utilisant la propriété de morphisme de  $\Psi$  et le fait que  $F$  est une primitive de  $\Psi$ ,

$$\Psi'(x) = (\Psi(x+\alpha) - \Psi(x))(F(\alpha))^{-1} = \Psi(x) \underbrace{(\Psi(\alpha) - I_n)(F(\alpha))^{-1}}_{\Psi'(0)} = \Psi(x)M$$

Donc  $\Psi$  est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbf{R}, & y'(x) = y(x)M \\ y(0) = I_n \end{cases}$$

et c'est aussi le cas de  $x \mapsto \exp(xM)$ .

Par théorème de Cauchy linéaire, comme  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est un espace vectoriel normé de dimension finie et comme l'application  $a : A \mapsto AM$  est un endomorphisme de cet espace, ce problème admet une unique solution, donc

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = \exp(xM).$$

## IV – Morphismes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\text{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$

24 ▷ Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . On a  $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$  tel que  $A = PBP^{-1}$ , ce qu'on réécrit plutôt  $AP = PB$ .

Notons  $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  les matrices des parties réelles et imaginaires des coefficients de  $P$  :

$$P = P_1 + iP_2.$$

Alors

$$\underbrace{AP_1}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})} + i \underbrace{AP_2}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})} = \underbrace{P_1B}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})} + i \underbrace{P_2B}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})}.$$

Par unicité des parties réelle et imaginaire, on en déduit que  $AP_1 = P_1B$  et  $AP_2 = P_2B$ . Malheureusement, il n'y a aucune raison pour que  $P_1$  ou  $P_2$  soit inversible en général.

L'idée astucieuse est de considérer la fonction polynomiale

$$\pi : x \mapsto \det(P_1 + xP_2).$$

Il s'agit d'un polynôme en  $x$  à coefficients réels qui n'admet pas  $i$  comme racine complexe car  $\pi(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det P \neq 0$ . Il ne s'agit donc pas du polynôme nul ce qui l'empêche de s'annuler sur  $\mathbf{R}$  tout entier.

Bref, il existe  $x \in \mathbf{R}$  tel que  $\pi(x) = \det(P_1 + xP_2) \neq 0$  donc  $Q = P_1 + xP_2 \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$  et  $AQ = QB$  soit  $A = QBQ^{-1}$ .

On a bien  $A$  et  $B$  semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

25 ▷  $N$  est une matrice nilpotente non nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Supposons, par l'absurde, que  $\ker N = \ker N^2$ . On a alors pour tout entier  $p \geq 2$ , si  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$  est tel que  $N^p X = 0$ ,  $N^{p-2} X \in \ker N^2 = \ker N$ , donc

$$N^{p-1} X = N(N^{p-2} X) = 0.$$

On a donc

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}), \quad \forall p \geq 2, \quad N^p X = 0 \implies N^{p-1} X = 0.$$

Mais comme  $N$  est nilpotente, on a  $k \in \mathbf{N}^*$  tel que  $N^k = 0_n$  (par exemple  $k = n$ ), donc pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ ,  $N^k X = 0$  et en itérant la propriété obtenue ci-dessus, on obtient  $NX = 0$ .

Cela signifie que  $N = 0_n$ , ce qui est contradictoire.

On a donc bien  $\ker N \neq \ker N^2$ .

**26** ▷ On a, d'après **23**,  $\exp(2\pi M) = \Psi(2\pi) = \varphi(e^{2i\pi}) = \varphi(1)$  donc  $\exp(2\pi M) = I_n$  car  $\varphi$  est un morphisme de groupes.

Un résultat du programme dit que les valeurs propres complexes de  $\exp(2\pi M)$  sont les  $e^{2\pi\lambda}$  où  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$ .

Comme ce sont les valeurs propres de  $I_n$ , elles valent toutes 1 et donc  $2\pi\lambda_k \in 2i\pi\mathbf{Z}$ , donc  $\lambda_k \in i\mathbf{Z}$ .

On a donc bien  $\text{Sp}_{\mathbf{C}}(M) \subset i\mathbf{Z}$ .

On peut éventuellement retrouver ce résultat en voyant que sur  $\mathbf{C}$ ,  $2\pi M$  est trigonalisable. On peut donc écrire  $M = PTP^{-1}$  avec  $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$  et  $T$  triangulaire supérieure avec sur la diagonale les valeurs propres complexes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $M$  comptées avec multiplicité. Alors

$$I_n = \exp(2\pi M) = P \exp(2\pi T) P^{-1} \text{ donc } \exp(2\pi T) = I_n$$

et l'égalité des coefficients diagonaux donne, pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e^{2\pi\lambda_k} = 1$ .

**27** ▷ Il s'agit d'une conséquence de la supplémentarité des sous-espaces caractéristiques.

Un résultat du programme nous dit que, comme son polynôme caractéristique est scindé,  $M$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  à une matrice diagonale par blocs  $\text{diag}(T_1, \dots, T_q)$ , dont les blocs diagonaux  $T_1, \dots, T_q$  sont triangulaires supérieurs avec des coefficients diagonaux égaux. De là à la décomposition de Dunford (qui elle est hors-programme), il ne manque qu'un pas.

Nécessairement, comme la matrice  $\text{diag}(T_1, \dots, T_q)$  est triangulaire, ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $M$ . Donc, pour tout  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,

$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & (*) \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ (0) & & & \lambda_k \end{pmatrix} = \lambda_k I_{p_k} + N_k \in \mathcal{M}_{p_k}(\mathbf{C}).$$

Notons  $D = \text{diag}(\lambda_1 I_{p_1}, \dots, \lambda_q I_{p_q}) \in \mathcal{D}_n(\mathbf{C})$  matrice diagonale telle que  $\text{Sp}_{\mathbf{C}}(D) = \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$ .

Et  $N = \text{diag}(N_1, \dots, N_q)$  matrice triangulaire supérieure stricte donc nilpotente.

On a bien  $M$  semblable à  $D + N$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $\lambda_k I_{p_k}$  et  $N_k$  commutent, donc  $DN = ND$ .

**28** ▷  $\exp(2\pi D)$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont de la forme  $e^{2\pi\lambda}$  où

$$2\pi\lambda \in 2\pi \text{Sp}_{\mathbf{C}}(D) = 2\pi \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M) \subset 2i\pi\mathbf{Z}$$

d'après les questions précédentes.

Ces coefficients diagonaux sont donc tous égaux à 1 et  $\exp(2\pi D) = I_n$ .

Comme  $N$  et  $D$  commutent, et, en introduisant  $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$  telle que  $M = P(D + N)P^{-1}$ ,

$$I_n = \exp(2\pi M) = P \exp(2\pi D + 2\pi N) P^{-1} = P \exp(2\pi D) \exp(2\pi N) P^{-1} = P \exp(2\pi N) P^{-1},$$

d'où on déduit que  $\exp(2\pi N) = I_n$ . Or, par nilpotence, on a  $p \in \mathbf{N}$  tel que

$$\exp(2\pi N) = I_n + 2\pi N + \dots + \frac{(2\pi)^p}{p!} N^p.$$

On a donc

$$2\pi N + \dots + \frac{(2\pi)^p}{p!} N^p = 0_n. \quad (*)$$

On va en déduire que  $N = 0_n$  en utilisant **25**. Notons que  $\ker N \subset \ker N^2$  est une inclusion vraie pour toute matrice. Prenons  $X \in \ker N^2$ . Alors  $N^2 X = 0$  et pour tout  $k \geq 2$ ,  $N^k X = 0$ .

En multipliant (\*) par  $X$  à droite, on tire  $NX = 0$ .

On a donc  $\ker N = \ker N^2$ , et, subséquentement,  $N = 0_n$ .

29 ▷ Soit  $x \in \mathbf{R}$ . On a alors

$$\Psi(x) = \exp(xM) = \exp(xPDP^{-1}) = P \exp(xD)P^{-1}$$

où  $D = \text{diag}(ik_1, \dots, ik_n)$  avec  $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{Z}$  car les valeurs propres complexes de  $D$  sont celles de  $M$ .

Sans perte de généralité, on peut supposer avoir mis les valeurs propres nulles en dernier.

Enfin, comme  $M$  est à coefficients réels, on sait que si un complexe est valeur propre de  $M$ , son conjugué est également valeur propre, avec la même multiplicité. On peut donc regrouper deux par deux les valeurs propres complexes non réelles avec leur conjugué, c'est-à-dire leur opposé vu leur forme ici. Ainsi,

$$D = \text{diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_p, -ik_p, 0, \dots, 0)$$

avec  $k_1, \dots, k_p \in \mathbf{Z}^*$ . On a alors

$$\exp(xD) = \text{diag}(e^{ixk_1}, e^{-ixk_1}, \dots, e^{ixk_p}, e^{-ixk_p}, 1, \dots, 1).$$

On pourrait alors vouloir utiliser la question 1, diagonaliser les matrices  $R_{xk_j}$ , en déduire que  $\Psi(x)$  et  $\text{diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1)$  sont des matrices réelles semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , et utiliser la question 24 pour en déduire qu'elles sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Mais la matrice de passage à coefficients réels ainsi obtenue serait dépendante de  $x$ , ce qui est problématique.

Pour contourner le problème, on va écrire  $R_\theta$  sous forme d'une exponentielle, en utilisant la diagonalisation dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  initiée en question 1. Nous avons vu que les valeurs propres de  $R_\theta$  sont  $e^{i\theta}$  et son conjugué  $e^{-i\theta}$ . Or

$$R_\theta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\beta \sin \theta = i\alpha \sin \theta \\ \alpha \sin \theta = i\beta \sin \theta \end{cases}$$

d'où on tire un vecteur propre  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  associé à  $e^{i\theta}$  et comme  $R_\theta$  est réelle, son conjugué  $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  est vecteur propre associé à  $e^{-i\theta}$ . On peut donc écrire

$$R_\theta = \tilde{P} \text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \tilde{P}^{-1}$$

avec  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$  indépendant de  $\theta$ . Alors

$$R_\theta = \exp(\tilde{P} \text{diag}(i\theta, -i\theta) \tilde{P}^{-1}) = \exp(\theta \tilde{P} \text{diag}(e^{i\pi/2}, e^{-i\pi/2}) \tilde{P}^{-1}) = \exp(\theta J).$$

où on a noté  $J = R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  pour simplifier.

Mais  $D = \text{diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_p, -ik_p, 0, \dots, 0)$  avec pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$\text{diag}(ik_j, -ik_j) = k_j \text{diag}(i, -i) = k_j \tilde{P}^{-1} J \tilde{P}$$

comme ci-dessus. On en déduit que  $D = R \text{diag}(k_1 J, \dots, k_p J, 0, \dots, 0) R^{-1}$  avec  $R = \text{diag}(\tilde{P}, \dots, \tilde{P}, 1, \dots, 1)$ .

Donc, par transitivité,  $M$  est semblable à la matrice réelle  $K = \text{diag}(k_1 J, \dots, k_p J, 0, \dots, 0)$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , donc, d'après 24, on a  $Q \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$  indépendante de  $x$  telle que  $M = QKQ^{-1}$ .

On en tire alors

$$\Psi(x) = Q \exp(xK) Q^{-1} = Q \text{diag}(\exp(xk_1 J), \dots, \exp(xk_p J), 1, \dots, 1) Q^{-1} = Q \text{diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1) Q^{-1}.$$

30 ▷ On sait que  $\theta \mapsto R_\theta$  est un morphisme du groupe  $(\mathbf{R}, +)$  dans le groupe  $(\text{SO}_2(\mathbf{R}), \times)$  (il suffit d'interpréter  $R_\theta$  comme matrice d'une rotation vectorielle d'angle  $\theta$  pour le retrouver). De là, et par propriétés du produit matriciel par blocs, on tire sans encombre qu'avec la forme obtenue à la question précédente, pour tous  $x, y \in \mathbf{R}$ ,

$$\Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y)$$

donc  $\Psi$  est un morphisme de groupes de  $(\mathbf{R}, +)$  dans  $(\text{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$ .

FIN DU CORRIGÉ