

# Mines-Ponts 2026 — Mathématiques 1

FILIÈRES MP – MPI

Un corrigé – J. Larochette – Lycée Leconte de Lisle, la Réunion

## Équation d'Euler-Lagrange et quelques applications

### I – Lemme fondamental du calcul variationnel

1 ▷ Comme  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}_-^*$  et  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ , par opérations,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}_*^+$ .

Montrons, par récurrence sur  $n \in \mathbf{N}$ , l'existence d'une fonction polynomiale  $P_n$  définie sur  $\mathbf{R}_+^*$  telle que

$$\forall x > 0, \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}.$$

- Pour  $n = 0$ ,  $P_0 : x \mapsto 1$  convient.
- Soit  $n \in \mathbf{N}$  tel que l'existence d'une telle fonction  $P_n$  soit connue. Alors

$$\forall x > 0, \varphi^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{x^2}P_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-1/x},$$

donc la fonction polynomiale  $P_{n+1} : x \mapsto x^2(P_n(x) - P_n'(x))$  convient, ce qui établit la récurrence.

2 ▷ On a déjà que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}_+^*$  et  $\mathbf{R}_-^*$  par opérations.

Montrons par applications répétées du théorème de la limite de la dérivée que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\varphi$  est  $n$  fois dérivable en 0 et que  $\varphi^{(n)}$  est continue en 0.

- Pour  $n = 0$ , comme  $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  et  $0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$ , on a bien  $\varphi$  continue en 0.
- Soit  $n \in \mathbf{N}$  pour lequel on suppose avoir établi que  $\varphi$  est  $n$  fois dérivable en 0 et  $\varphi^{(n)}$  est continue en 0. Alors

**H1**  $\varphi^{(n)}$  est continue sur  $\mathbf{R}$ .

**H2**  $\varphi^{(n)}$  est dérivable sur  $\mathbf{R}^*$ .

**H3** Pour  $x > 0$ ,  $\varphi^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  par croissances comparées.

$$\text{Pour } x < 0, \varphi^{(n+1)}(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0.$$

$$\text{Ainsi, } \varphi^{(n+1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

On en déduit que  $\varphi^{(n)}$  est dérivable en 0, que  $\varphi^{(n+1)}(0) = 0$  et que  $\varphi^{(n+1)}$  est continue en 0, ce qui établit la récurrence.

Ainsi,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ .

3 ▷ On pose  $\psi_{c,d} : x \in \mathbf{R} \mapsto \varphi(x-c)\varphi(d-x)$ . Alors  $\psi_{c,d}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}$  par opérations avec 2.

De plus,

- si  $x \geq d$  ou  $x \leq c$ , alors  $d-x \leq 0$  ou  $x-c \leq 0$  donc  $\psi_{c,d}(x) = 0$ ,
- si  $c < x < d$ , alors  $d-x > 0$  et  $x-c > 0$  donc  $\psi_{c,d}(x) > 0$ .

4 ▷ Supposons que  $f$  ne soit pas nulle sur  $[a, b]$ .

Alors il existe au moins un point de  $[a, b]$  en lequel  $f$  n'est pas nulle et, par continuité, un intervalle ouvert  $]c, d[ \subset [a, b]$  contenant ce point sur lequel  $f$  ne s'annule pas.

Alors  $f \times \psi_{c,d}$  est continue, de signe constant et d'intégrale nulle sur  $[a, b]$  donc constamment nulle sur  $[a, b]$ .

Comme  $\psi_{c,d} > 0$  sur  $]c, d[$ , cela implique que  $f$  est nulle sur  $]c, d[$  ce qui est contradictoire.

Finalement, sur  $[a, b]$ ,  $f \equiv 0$ .

## II – Équation d'Euler–Lagrange

5 ▷ Soit  $y \in \mathcal{C}$ . Comme les fonctions  $y$  et  $y'$  sont continues sur  $[x_A, x_B]$  à valeurs dans  $U$  et  $V$  respectivement, et comme la fonction  $f$  est continue sur  $[x_A, x_B] \times U \times V$ ,  $x \mapsto f(x, y(x), y'(x))$  est continue sur  $[x_A, x_B]$ , donc  $T$  est bien définie sur  $\mathcal{C}$ .

6 ▷ Supposons, par l'absurde, que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $\varepsilon \in ]-\alpha, \alpha[$  tel que  $y_\varepsilon \notin \mathcal{C}$ .

Avec  $\alpha = \frac{1}{2^n}$ , on construit une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_{\varepsilon_n} \notin \mathcal{C}$ .

On a bien que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_{\varepsilon_n}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[x_A, x_B]$ , valant  $y_0$  en  $x_A$  et  $y_1$  en  $x_B$ .

Le fait que  $y_{\varepsilon_n} \notin \mathcal{C}$  se traduit donc par l'existence de  $x_n \in [x_A, x_B]$  tel que  $y_{\varepsilon_n}(x_n) \notin U$  ou bien  $y'_{\varepsilon_n}(x_n) \notin V$ .

Il y a donc ou bien une infinité de  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $y_{\varepsilon_n}(x_n) \notin U$ , ou bien une infinité de  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $y'_{\varepsilon_n}(x_n) \notin V$ .

Plaçons-nous dans le premier cas, le deuxième se traite de la même manière.

On peut construire une suite  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en ne gardant que les indices, dans l'ordre, pour lesquels  $y_{\varepsilon_n}(x_n) \in U^c$ .

Mais la suite  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est réelle et bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstraß nous permet d'en extraire une suite (qui est aussi une suite extraite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ), convergente :  $x_{\psi(n)} \rightarrow \ell \in [x_A, x_B]$ .

Alors, par continuité,

$$y_{\varepsilon_{\psi(n)}}(x_{\psi(n)}) = z_0(x_{\psi(n)}) + \varepsilon_{\psi(n)} \eta(x_{\psi(n)}) \rightarrow z_0(\ell).$$

Comme  $U^c$  est fermé, et comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_{\varepsilon_{\psi(n)}}(x_{\psi(n)}) \in U^c$ , on en déduit que  $z_0(\ell) \in U^c$ , ce qui est contradictoire avec  $z_0 \in \mathcal{C}$ .

On a donc montré, par l'absurde, l'existence de  $\alpha > 0$  tel que  $\forall \varepsilon \in ]-\alpha, \alpha[$ ,  $y_\varepsilon \in \mathcal{C}$ .

7 ▷ Soit  $g : \begin{cases} ]-\alpha, \alpha[ \times ]x_A, x_B[ & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (\varepsilon, x) & \longmapsto f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \end{cases}$

On utilise le théorème de classe  $\mathcal{C}^1$  des intégrales à paramètre.

H1 Pour tout  $x \in ]x_A, x_B[$ ,  $\varepsilon \mapsto g(\varepsilon, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-\alpha, \alpha[$  car  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]x_A, x_B[ \times U \times V$  et  $y_\varepsilon, y'_\varepsilon$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]x_A, x_B[$ . On a, de plus,

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} : (\varepsilon, x) \mapsto \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$$

en utilisant la règle de la chaîne, avec  $y_\varepsilon(x) = z_0(x) + \varepsilon \eta(x)$  et  $y'_\varepsilon(x) = z'_0(x) + \varepsilon \eta'(x)$ .

H2 Pour tout  $\varepsilon \in ]-\alpha, \alpha[$ ,  $x \mapsto g(\varepsilon, x)$  est continue sur le segment  $[x_A, x_B]$  donc intégrable sur  $]x_A, x_B[$ .

H3 Pour tout  $\varepsilon \in ]-\alpha, \alpha[$ ,  $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} : (\varepsilon, x)$  est continue donc continue par morceaux sur  $]x_A, x_B[$ .

H4 (domination) Malheureusement, les hypothèses de l'énoncé ne permettent pas de dominer sereinement  $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}$ .

On suppose ici que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}$  sont bornées sur  $]x_A, x_B[ \times U \times V$  par des constantes  $K_1$  et  $K_2$ .

Notons que  $\eta$  et  $\eta'$  sont continues sur le segment  $[x_A, x_B]$ , donc, par théorème des bornes atteintes, bornées par des constantes  $C$  et  $C'$

Pour tout  $(\varepsilon, x) \in ]-\alpha, \alpha[ \times ]x_A, x_B[$ ,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, x) \right| \leq |\eta(x)| \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right| + |\eta'(x)| \left| \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right| \leq CK_1 + C'K_2 = \zeta(x).$$

La fonction constante positive  $\zeta$  est continue sur le segment  $[x_A, x_B]$  donc intégrable sur  $]x_A, x_B[$ .

On en déduit que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-\alpha, \alpha[$  et

$$\forall \varepsilon \in ]-\alpha, \alpha[, \quad \varphi'(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} \left( \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right) dx.$$

8 ▷ On sait que  $T$  admet un extremum local en  $z_0 \in \mathcal{C}$ .

Supposons, quitte à changer  $f$  en  $-f$ , qu'il s'agit d'un minimum local.

Cela signifie qu'il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $z \in \mathcal{C}$  tel  $\|z - z_0\|_\infty \leq r$ ,  $T(z) \geq T(z_0)$ .

Or, si  $\varepsilon \in ]-\alpha, \alpha[$ ,  $\|y_\varepsilon - z_0\|_\infty = |\varepsilon| \|\eta\|_\infty$ .

Comme  $\varphi(\varepsilon) = T(y_\varepsilon)$ , on en déduit que si  $|\varepsilon| \leq \frac{r}{1 + \|\eta\|_\infty}$ ,  $\varphi(\varepsilon) \geq \varphi(0) = T(z_0)$ .

Ainsi,

**H1**  $0$  est intérieur à  $] -\alpha, \alpha[$ ,

**H2**  $\varphi$  est dérivable sur  $] -\alpha, \alpha[$ ,

**H3**  $\varphi$  admet un extremum local en  $0$ .

Par condition nécessaire d'extremum local,  $\varphi'(0) = 0$ .

On en déduit que

$$\int_{x_A}^{x_B} \left( \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y} (x, z_0(x), z'_0(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x)) \right) dx = 0.$$

Effectuons un intégration par partie dans  $\int_{x_A}^{x_B} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x)) dx$ .

Supposons avoir  $x_A < \alpha < \beta < x_B$ . Comme  $\eta$  et  $h : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x))$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]x_A, x_B[$ , on peut alors écrire

$$\int_{\alpha}^{\beta} \eta'(x) h(x) dx = [\eta(x) h(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \eta(x) h'(x) dx$$

**Nous avons de nouveau besoin d'une hypothèse que  $h : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x))$  est bornée sur  $]x_A, x_B[$  qui n'apparaît pas dans l'énoncé** pour conclure que  $\eta(x) h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} 0$  et  $\eta(x) h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \beta} 0$  car  $\eta$  est continue en  $x_A$  et  $x_B$

et

$$\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0.$$

On en déduirait alors que

$$\int_{x_A}^{x_B} \eta'(x) h(x) dx = - \int_{x_A}^{x_B} \eta(x) h'(x) dx$$

et finalement que  $\int_{x_A}^{x_B} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial y} (x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x)) \right) \right) \eta(x) \right) dx = 0.$

9 ▷ L'idée est bien sûr d'utiliser ici le résultat de la première partie. Malheureusement, il faudrait pour cela que

$$F : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y} (x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x)) \right)$$

se prolonge par continuité à  $[x_A, x_B]$ , ce qui ne fait (toujours) pas partie des hypothèses de l'énoncé.

**Supposons que cela soit le cas (il suffit pour cela de supposer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[x_A, x_B] \times U \times V$  au lieu de  $]x_A, x_B[ \times U \times V$ , ce qui permet aussi de traiter les deux précédentes questions)**, et notons toujours  $F$  le prolongement par continuité.

Avec ce qui précède, on a que pour toute fonction  $\eta$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[x_A, x_B]$  telle que  $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$ ,

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x) \eta(x) dx = 0.$$

Les fonctions  $\psi_{c,d}$  avec  $x_A \leq c < d \leq x_B$  construites à la question 3 vérifient bien la condition  $\psi_{c,d}(x_A) = \psi_{c,d}(x_B) = 0$ .

On conclut alors, comme dans 4, que  $F$  est nulle sur  $[x_A, x_B]$ .

**10** ▷ Supposons que  $\forall (x, y, z) \in ]x_A, x_B[ \times U \times V$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0$ .

Posons  $G : x \mapsto f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))$ , fonction dérivable sur  $]x_A, x_B[$ . On calcule, avec la règle de la chaîne,

$$G' : x \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, z_0(x), z'_0(x)) + z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) + z''_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) - z''_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right)$$

Donc  $G' \equiv 0$  par l'hypothèse faite ici et la question précédente.

Comme  $]x_A, x_B[$  est un intervalle, on en déduit que  $G$  est constante sur  $]x_A, x_B[$ , ce qui est le résultat demandé ici.

### III – Le chemin le plus court est la ligne droite !

**11** ▷ On utilise la partie précédente en posant  $f : (x, y, z) \mapsto \sqrt{1 + z^2}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]x_A, x_B[ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , avec  $y_0 = y_A$  et  $y_1 = y_B$ .

L'identité de Beltrami nous dit qu'il existe une constante  $C \in \mathbf{R}$  telle que  $\forall x \in ]x_A, x_B[$ ,

$$C = f(x, y_0(x), y'_0(x)) - y'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y'_0(x)) = \sqrt{1 + y'_0(x)^2} - y'_0(x) \frac{2y'_0(x)}{2\sqrt{1 + y'_0(x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'_0(x)^2}} \neq 0$$

donc

$$\forall x \in ]x_A, x_B[, \quad 1 + y'_0(x)^2 = \frac{1}{C^2}$$

donc

$$\frac{1}{C^2} - 1 \geq 0 \text{ et } \forall x \in ]x_A, x_B[, \quad y'_0(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{C^2} - 1}$$

Par continuité de  $y'_0$  sur le segment  $[x_A, x_B]$ , on en déduit que  $y'_0$  est constante sur ce segment (c'est toujours + ou toujours - et cette valeur est aussi prise aux bornes) et donc que

$y_0$  est une fonction affine.

### IV – Le chemin le plus rapide est la cycloïde

**12** ▷ On est cette fois dans les conditions de la partie II avec  $U = \mathbf{R}_*^+$  et  $V = \mathbf{R}_*^-$  ouvert et  $f : (x, y, z) \mapsto \sqrt{\frac{1 + z^2}{y}}$

de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]x_A, x_B[ \times \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}_*^-$ .

L'identité de Beltrami nous donne  $C_0 \in \mathbf{R}$  tel que  $\forall x \in ]x_A, x_B[$ ,

$$\begin{aligned} C_0 &= f(x, y_0(x), y'_0(x)) - y'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y'_0(x)) \\ &= \sqrt{\frac{1 + y'_0(x)^2}{y_0(x)}} - y'_0(x) \frac{\frac{y'_0(x)}{\sqrt{1 + y'_0(x)^2}}}{\sqrt{y_0(x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y_0(x) (1 + y'_0(x)^2)}} \neq 0, \end{aligned}$$

donc  $\forall x \in ]x_A, x_B[, \quad y_0(x) (1 + y'_0(x)^2) = \frac{1}{C_0^2} = C$ , et c'est encore valable aux bornes  $x_A$  et  $x_B$  par continuité.

13 ▷  $\cotan$  est définie sur  $\mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ . Elle est dérivable sur  $]0, \pi[$  et

$$\cotan' = \frac{-\sin^2 - \cos^2}{\sin^2} = -1 - \cotan^2$$

donc  $\cotan$  est strictement décroissante sur  $]0, \pi[$ . Comme elle est également continue, le théorème de la bijection nous assure qu'elle induit une bijection de  $]0, \pi[$  sur  $\cotan(]0, \pi[) = \left] \lim_{\pi^-} \cotan, \lim_{0^+} \cotan \right[ = ] -\infty, \infty[ = \mathbf{R}$ .

Comme  $\cotan' = -\frac{1}{\sin^2}$  n'est jamais nulle,  $\operatorname{arccotan}$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \operatorname{arccotan}'(x) = \frac{1}{\cotan'(\operatorname{arccotan}(x))} = \frac{1}{-1 - \cotan^2(\operatorname{arccotan}(x))}$$

donc  $\forall x \in \mathbf{R}, \operatorname{arccotan}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ .

14 ▷ Soit  $x \in [x_A, x_B]$ . D'après 12,  $y_0(x) = \frac{2}{1+y_0'(x)^2}$ . Or

$$1 - \cos(\theta(x)) = 1 - \cos(2 \operatorname{arccotan}(y_0'(x))) = 2 \sin^2(\operatorname{arccotan}(y_0'(x))) = \frac{2}{1 + \cotan(\operatorname{arccotan}(y_0'(x)))^2} = \frac{2}{1 + y_0'(x)^2} = y_0(x)$$

en utilisant les deux expressions de  $\cotan'$  vues dans la question précédente ce qui donne la formule  $\sin^2 = \frac{1}{1 + \cotan^2}$ .

Finalement,  $\forall x \in [x_A, x_B], y_0(x) = 1 - \cos(\theta(x))$ .

15 ▷ Pour alléger les calculs, on se permet de noter  $\sin(\theta)$  à la place de  $\sin \circ \theta$ .

#### Première méthode

$\theta - \sin(\theta)$  est dérivable sur  $[x_A, x_B]$  et

$$(\theta - \sin(\theta))' = \theta' - \theta' \cos(\theta) = \theta' \cdot y_0 = -\frac{2y_0''y_0}{1+y_0'^2} = -y_0''y_0$$

en utilisant la question précédente et la question 12.

Or, en dérivant la relation de la question 12 (ce qui est licite vu le caractère  $\mathcal{C}^2$  de  $y_0$ ), on obtient

$$y_0' (1 + y_0'^2) + 2y_0 y_0' y_0'' = 0.$$

Comme  $y_0' < 0$ , on peut réécrire

$$-y_0'' y_0 = \frac{1}{2} y_0 (1 + y_0'^2) = 1$$

toujours par 12.

Finalement,  $(\theta - \sin(\theta))' \equiv 1$  sur l'intervalle  $[x_A, x_B]$  d'où l'existence d'une constante  $c \in \mathbf{R}$  telle que

$$\forall x \in [x_A, x_B], \theta(x) - \sin(\theta(x)) = x - c.$$

#### Deuxième méthode

On dérive la relation de la question précédente, ce qui donne

$$y_0' = \theta' \sin(\theta).$$

Or, par définition de  $\theta$ ,  $y_0' = \cotan \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$ . Ainsi,

$$\cos \frac{\theta}{2} = 2\theta' \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Comme  $y_0' < 0$ ,  $\frac{\theta}{2}$  est à valeur dans  $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ , donc  $\cos \frac{\theta}{2}$  ne s'annule pas. Comme  $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos(\theta)$ , on en déduit que  $(\theta - \sin(\theta))' \equiv 1$  et on conclut comme dans la première méthode.

On a résolu le très célèbre et classique problème de la brachistochrone.

<https://mathcurve.com/courbes2d/brachistochrone/brachistochrone.gif>

## V – Une application à une structure optimale : la caténoïde

**16** ▷ Cette fois, la fonction  $f : (x, y, z) \mapsto y\sqrt{1+z^2}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . L'identité de Beltrami nous donne  $C \in \mathbf{R}$  tel que  $\forall x \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} C &= f(x, y_0(x), y_0'(x)) - y_0'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y_0'(x)) \\ &= y_0(x) \sqrt{1 + y_0'(x)^2} - y_0'(x) y_0(x) \frac{y_0'(x)}{\sqrt{1 + y_0'(x)^2}} \\ &= \frac{y_0(x)}{\sqrt{1 + y_0'(x)^2}}, \end{aligned}$$

donc, par continuité,  $\forall x \in [0, 1]$ ,

$$C^2 (1 + y_0'(x)^2) = y_0(x)^2.$$

Mais  $y_0$  ne peut être nulle car  $y_0(0) = 1$ , donc  $C \neq 0$  et en posant  $c = \frac{1}{C} \neq 0$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $1 + y_0'(x)^2 = c^2 y_0(x)^2$ .

**17** ▷  $\text{ch}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbf{R}^+$  donc induit une bijection de  $\mathbf{R}^+$  sur  $\text{ch}(\mathbf{R}^+) = [1, +\infty[$ .

Comme  $\text{ch}' = \text{sh}$  ne s'annule qu'en 0,  $\text{argch}$  est dérivable sur  $[1, +\infty[ \setminus \{\text{ch}(0)\} = ]1, +\infty[$  et pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $\text{argch}'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{argch } x)} = \frac{1}{\text{sh}(\text{argch } x)}$ .

Or  $\text{sh}^2(\text{argch } x) = \text{ch}^2(\text{argch } x) - 1 = x^2 - 1$  et  $\text{argch } x \geq 0$  donc  $\text{sh}(\text{argch } x) \geq 0$  et donc  $\text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

**18** ▷ En utilisant **16** et les hypothèses  $c^2 y_0^2 > 1$  et  $y_0' > 0$ , on obtient, sur  $[0, 1]$ ,  $\frac{c y_0'}{\sqrt{c^2 y_0^2 - 1}} = c$ , ce qui se réécrit

$$(\text{argch}(c y_0))' = c.$$

Comme  $[0, 1]$  est un intervalle, on a une constante  $d \in \mathbf{R}$  telle que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\text{argch}(c y_0(x)) = cx + d$ , donc

$$y_0(x) = \frac{\text{ch}(cx + d)}{c}.$$

On obtient une surface de révolution appelée caténoïde, obtenue en faisant tourner une chaînette (un cosinus hyperbolique) autour d'un axe.

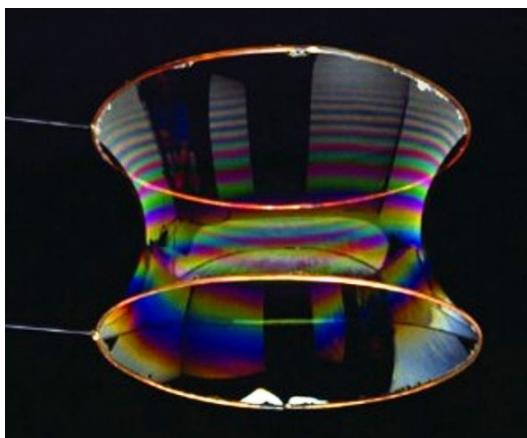


FIGURE 1 – La caténoïde comme surface minimisant l'énergie potentielle de tension superficielle. Source : <http://www.laphyth.org>

FIN DU CORRIGÉ