# Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

*Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement*

Le comité de rédaction remercie Walter Appel, Marc Becker, Laurent Bonavero, Olivier Bouverot, Philippe Châteaux, Denis Choimet, Yves Dutrieux, Alexis Fagebaume, Stéphane Flon, Serge Francinou, Jérôme Gartner, Yoann Gentric, Cyril Germain, Hervé Gianella, Gil Guibert, Max Hochart, Adrien Joseph, Denis Jourdan, Thomas Lafforgue, Christelle Larchères, François Lussier, Roger Mansuy, Shalay Mohan, Bruno Morel, François Moulin, Jean Nougayrède, Mickaël Prost, Marc Rezzouk, Franz Ridde, Emmanuel Roblet, Christophe Schneider, Cécile Stérin, Brice Touzillier, pour leurs contributions à cette liste d'exercices.

Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 14 février 2026, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : *exercices@rms-math.com* .

Les exercices avec une étoile sont réservés aux étudiants, ceux avec deux étoiles sont proposés à tous les lecteurs.

### Écoles Normales Supérieures – MP - MPI

***Algèbre***

**1.** [L] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un chemin auto-évitant de longueur $n$ de $\mathbb{Z}^2$ est une suite injective de points $a_0, \dots, a_n$ de $\mathbb{Z}^2$ telle que $a_0 = (0,0)$ et, pour tout $i$, $\|a_{i+1} - a_i\| = 1$ pour la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$. On note $A_n$ le nombre de chemins auto-évitants de longueur $n$.
***a)*** Montrer que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A_{m+n} \leqslant A_m A_n$.
***b)*** Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $n$ assez grand, $(2+\varepsilon)^n \leqslant A_n \leqslant (3-\varepsilon)^n$.

**2.** ★★ [SR] Un sous-ensemble non vide $S$ de $\mathbb{Z}$ est dit direct si, pour $x, y, s, t \in S$, la condition $x + y = s + t$ implique que $\{x, y\} = \{s, t\}$.
***a)*** Les ensembles $\{1, 3, 6\}$ et $\{1, 3, 6, 10, 15\}$ sont-ils directs ?
***b)*** Trouvez un ensemble infini direct.

***c)*** Montrer l'existence de deux constantes $A, B > 0$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
– pour tout ensemble direct $S$ inclus dans $[\![0, n]\!]$, on ait $|S| \leqslant B\, n^{1/2}$,
– il existe un ensemble direct $S$ inclus dans $[\![0, n]\!]$ tel que $A\, n^{1/3} \leqslant |S|$.
***d)*** Existe-t-il un ensemble $S$ direct inclus dans $\mathbb{N}$ tel que $S + S = \mathbb{N}$ ?
***e)*** Existe-t-il un ensemble $S$ direct inclus dans $\mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{N}$ soit inclus dans $S + S$ ?
***f)*** Existe-t-il un ensemble $S$ direct inclus dans $\mathbb{Z}$ tel que $S + S = \mathbb{Z}$ ?

**3.** ★★ [L] Soit $(u_n)$ définie par $u_0 = 4, u_1 = u_2 = 0, u_3 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = u_n + u_{n+1}$. Montrer que, pour tout nombre premier $p$, $p$ divise $u_p$.

**4.** [SR] On considère la suite $(F_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
***a)*** Exprimer $F_n$ en fonction de $n$.
***b)*** Montrer que $F_{p+q} = F_p F_{q+1} + F_{p-1} F_q$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
***c)*** Calculer $F_m \wedge F_n$ pour tous $m, n \geqslant 0$.

**5.** ★ [L] On note $d_n$ le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $d_n = O(n^{\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$.

**6.** [PLSR] ***a)*** Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers $p$ tels que $p \equiv 3\,[4]$.
***b)*** Soient $p$ un nombre premier et $n \geqslant 2$. Soit $k = \dfrac{(np)^p - 1}{np - 1}$.
  ***i)*** Montrer que $k \equiv 1\,[p]$.
  ***ii)*** Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $d$ divise $k$ alors $d \equiv 1\,[p]$.
***c)*** Soit $p$ un nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo $p$.

**7.** [SR] ***a)*** Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ?
***b)*** Soit $n \geqslant 3$. On considère sa décomposition en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ où les $p_i$ sont premiers distincts et supérieurs à 3, les $\alpha_i$ dans $\mathbb{N}^*$. On admet que, pour tout $i$, $(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. Montrer que la proportion d'éléments d'ordre pair dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est supérieure ou égale à $1 - \dfrac{1}{2^r}$.
***c)*** Déterminer le nombre de solutions de $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
***d)*** Caractériser les éléments $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ d'ordre $r = 2\ell$ pair tel que $x^\ell \neq -1$.

**8.** [PLSR] Soient $p$ un nombre premier impair, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $q = p^\alpha$ et $f : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ une fonction. Une partie $D$ de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est dite $f$-génératrice si :
$\forall y \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \exists n \geqslant 2, \exists d_1, \dots, d_n \in D, y = f(\dots f(f(d_1, d_2), d_3), \dots d_n)$.
***a)*** On considère le cas où $f : (x, y) \mapsto x - y$. Déterminer les parties $f$-génératrices de cardinal minimal et calculer leur nombre.
Dans la suite de l'exercice, on considère le cas où $f : (x, y) \mapsto xy$.
***b)*** Montrer qu'il n'existe pas de partie $f$-génératrice de cardinal 1.
***c)*** On admet que le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. Montrer qu'il existe une partie $f$-génératrice de cardinal 2.
***d)*** Caractériser les parties $f$-génératrices de cardinal 2.

**9.** [L] Dénombrer les morphismes de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$ dans le groupe des automorphismes de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z},+)$.

**10.** $^\star$ [P] Soit $A$ un anneau tel que tout élément de $a \in A$ est nilpotent ou idempotent, c'est-à-dire tel que $a^2 = a$.
***a)*** Montrer que tout élément de $A$ est idempotent.
***b)*** Montrer que $A$ est commutatif.
***c)*** On suppose que $A$ est fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A$ soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

**11.** [PLSR] On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \left\{a + ib\sqrt{2}\ ;\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.
***a)*** Rappeler la démonstration du fait que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux.
***b)*** Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ dont les idéaux sont principaux.
***c)*** Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
***d)*** Trouver les $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 + 2 = y^3$.

**12.** $^\star$ [PLSR] Soit $(A,+)$ un groupe abélien. On dit qu'il est sans torsion lorsque $n.x \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in A \setminus \{0\}$. Un ordre de groupe sur $(A,+)$ est une relation d'ordre totale $\leqslant$ sur l'ensemble $A$ telle que $\forall (x,y,z) \in A^3,\ x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z$.
***a)*** Montrer que si $(A,+)$ possède un ordre de groupe alors il est sans torsion.
***b)*** Montrer que $(\mathbb{Z}^n,+)$ possède un ordre de groupe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
***c)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^m$ pour un $m \in [\![0,n]\!]$.

**13.** [PLSR] Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $r \geqslant 2$.
***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique suite presque nulle $(a_{k,r}(n))_{k \geqslant 0}$ telle que $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,r}(n)\, r^k$ avec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{k,r}(n) \in [\![0, r-1]\!]$.
***b)*** Montrer que $(a_{k,r}(n))_{n \geqslant 1}$ est périodique et trouver sa période.
***c)*** Montrer que $(a_{k,r}(n^n))_{n \geqslant 1}$ est périodique à partir d'un certain rang.

**14.** [PLSR] On pose $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{N}^{*3}\ ;\ \ x \leqslant y \leqslant z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.
***a)*** Déterminer les éléments de $S$ vérifiant $x = y$ ou $y = z$.
***b)*** Montrer qu'une infinité d'éléments de $S$ vérifient $x = 1$.
***c)*** On pose $f : (x,y,z) \mapsto (y,z,3yz - x)$ et $g : (x,y,z) \mapsto (x,z,3xz - y)$.
Montrer $S$ est l'ensemble des images de $(1,1,1)$ par toutes les composées de $f$ et $g$.

**15.** [PLSR] ***a)*** Soit $A$ un anneau commutatif. Rappeler la définition d'un idéal de $A$.
Un idéal $I$ de $A$ dit maximal si $A$ est le seul idéal $J$ de $A$ tel que $I \subsetneq J \subset A$.
Montrer qu'un idéal maximal de $A$ ne contient pas d'élément inversible.
***b)*** On pose $U = \mathcal{F}(\{0,1\},\mathbb{R})$. Donner les idéaux maximaux de $U$.
***c)*** On pose $V = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Donner les idéaux maximaux de $V$.

**16.** $^\star$ [PLSR] Soit $A$ un anneau commutatif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Sigma_n(A) = \left\{c_1^2 + \cdots + c_n^2,\ (c_1,\ldots,c_n) \in A^n\right\}$.
***a)*** Montrer que $\Sigma_2(A)$ est stable par multiplication.

***b)*** Est-ce que $\Sigma_3(A)$ est stable par multiplication quel que soit l'anneau $A$ envisagé ?
***c)*** On suppose que $A$ est un corps de caractéristique différente de 2 et que $n$ est une puissance de 2. Soient $c_1, \ldots, c_n$ dans $A$ et $s = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(A)$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$ et qui vérifie $MM^T = M^T M = sI_n$.
***d)*** En déduire que $\Sigma_{2^n}(A)$ est stable par multiplication.

**17.** [SR] Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre (donc commutatif). On suppose que $A$ est euclidien, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $t : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
(i) $\forall (a, b) \in A \times (A \setminus \{0\}),\ \exists (q, r) \in A^2,\ a = bq + r$ et ($r = 0$ ou $t(r) < t(b)$).
(ii) $\forall (a, b) \in (A \setminus \{0\})^2,\ t(ab) \geqslant t(a)$.
***a)*** Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont euclidiens, tout comme n'importe quel corps $\mathbb{K}$.
***b)*** Montrer que tout idéal de $A$ est principal.
***c)*** On suppose que $t(1_A) = 0$. Montrer que les éléments inversibles de $A$ sont les $u \in A \setminus \{0\}$ tels que $t(u) = 0$.
On suppose dans toute la suite de l'exercice que dans l'hypothèse (i) il y a en plus unicité du couple $(q, r)$ solution.
***d)*** Montrer que $t(a + b) \leqslant \max(t(a), t(b))$ quels que soient $a \in A \setminus \{0\}$ et $b \in A \setminus \{0\}$ tels que $a + b \neq 0$.
***d)*** Montrer que $A^\times \cup \{0\}$ est un sous-corps de $A$.
***e)*** Montrer que $A$ est un corps ou est isomorphe à $\mathbb{K}[X]$ pour un corps $\mathbb{K}$.

**18.** [PLSR] Soit $p$ un nombre premier. On note $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geqslant 1}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n$ appartienne à l'anneau $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et que $x_n$ soit l'image de $x_{n+1}$ par l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
***a)*** Montrer que l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée font de $\mathbb{Z}_p$ un anneau contenant un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$.
***b)*** Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est intègre.
***c)*** Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}_p$.
***d)*** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $p$ divise $P(x)$ et que $p$ ne divise pas $P'(x)$. Montrer que $P$ admet une racine $y$ dans $\mathbb{Z}_p$ telle que $y_1 = \bar{x}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

**19.** [P] On considère $P = X^n - a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n \in \mathbb{R}[X]$, scindé sur $\mathbb{R}$ et de racines réelles $x_1, \ldots, x_n$.
Montrer que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $\left| x_k - \dfrac{a_1}{n} \right| \leqslant \dfrac{n-1}{n} \sqrt{a_1^2 - \dfrac{2n}{n-1} a_2}$.

**20.** ★ Soient $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $f(\mathbb{Q}) = g(\mathbb{Q})$. Montrer que $\deg f = \deg g$.

**21.** Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $m < n$. Soit $\mathcal{P}_{n,m}$ l'ensemble des polynômes complexes de degré $n$ dont 0 est racine d'ordre $m$ et dont les autres racines sont de module $\geqslant 1$.
Déterminer $\inf \{|z| \ ;\ z \in \mathbb{C}^*,\ \exists P \in \mathcal{P}_{n,m},\ P'(z) = 0\}$.

**22.** ⋆ [SR] Soit $I = \{P \in \mathbb{C}[X]\ ;\ \forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) \in \mathbb{Z}\}$. On pose $H_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ et $D_n(P) = \Delta^n(P)(0)$.
***a)*** Montrer que $(H_n)_{n\geqslant 0}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.
***b)*** Montrer que, pour tout $n$, $H_n \in I$.
***c)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(H_n) = H_{n-1}$.
***d)*** Montrer que $I \subset \mathbb{Q}[X]$.
***e)*** Montrer que $I = \left\{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i H_i\ ;\ n \in \mathbb{N},\ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n\right\}$.
***f)*** Soient $P_1, P_2 \in I$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P_1(n)$ soit premier avec $P_2(n)$. Montrer qu'il existe $U_1, U_2 \in I$ tels que $U_1P_1 + U_2P_2 = 1$.

**23.** ⋆⋆ [PLSR] Soit $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $C_H = \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}),\ MH = HM\}$.
***a)*** Montrer que $C_H$ est un sous-groupe infini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
***b)*** Montrer que $C_H = \mathbb{Z}[H] \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, où $\mathbb{Z}[H] = \{xI + yH,\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$.
***c)*** Montrer que $C_H$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ et en donner un système de générateurs.

**24.** ⋆ [L] Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le signe de $\det\left(A^k + B^k\right)$.

**25.** [SR] Soient $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ et $x_0, \ldots, x_{n-1}$ des réels $> 0$. On souhaite montrer que :

$$\det\left(\frac{d^j}{dx^j}\left(f(x)^{x_i}\right)\right)_{0\leqslant i,j<n} = f(x)^{\sum_{0\leqslant i<n}(x_i - i)} f'(x)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{0\leqslant i<j<n} (x_j - x_i).$$

***a) i)*** Soit $(p_j)_{0\leqslant j<n}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout $j$, $p_j$ est de degré $j$ et de coefficient dominant $d_j$.
Montrer que $\det\left(p_j(x_i)\right)_{0\leqslant i,j<n} = d_0 \times \cdots \times d_{n-1} \displaystyle\prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

***ii)*** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $p_j \in \mathbb{R}[X]$ de degré $j$ et de coefficient dominant $f'(x)^j$ tel que : $\forall z \in \mathbb{R}$, $\dfrac{d^j}{dx^j}\left(f(x)^z\right) = f(x)^{z-j} p_j(z)$.

***iii)*** Démontrer le résultat annoncé. Que dire dans des cas particuliers ?

***b)*** Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, on note $c_{i,j}$ le coefficient en $x^j$ de $f^i$. Calculer $\det\left((c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$.

**26.** [L] Soit $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A$ est semblable à $A^{-1}$ si et seulement s'il existe $B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = BC$, $B^2 = C^2 = I_3$.

**27.** ⋆⋆ [P] Soit $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des matrices $M$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M\overline{M}$ appartient à $\mathbb{C}^* I_n$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $A \sim B$ s'il existe $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $A = \lambda\, \overline{M} B M^{-1}$. Justifier que $\sim$ induit une relation d'équivalence sur $\mathcal{R}_n$. Déterminer les classes d'équivalence sur $\mathcal{R}_n$.

**28.** ★★ [P] On note $G_n$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Soit $\Phi : G_n \to \mathbb{R}$ une application telle que $\forall V, W \in G_n,\ \Phi(V \cap W) + \Phi(V + W) \leqslant \Phi(V) + \Phi(W)$ et $\Phi(\{0\}) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un unique $V_0 \in G_n$ de dimension maximale tel que $\inf\limits_{V \in G_n \setminus \{(0)\}} \dfrac{\Phi(V)}{\dim V} = \dfrac{\Phi(V_0)}{\dim V_0}$.

**29.** [PLSR] Soient $G$ un groupe admettant une partie génératrice finie et $H$ un groupe fini.

***a)*** Montrer que l'ensemble $E$ des morphismes de groupes de $G$ vers $H$ est fini.

***b)*** Soit $\psi$ un endomorphisme surjectif du groupe $G$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi) \subset \bigcap\limits_{\varphi \in E} \mathrm{Ker}(\varphi)$.

***c)*** On pose $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\ \det(M) = 1\}$.

***i)*** Montrer que $G$ est un groupe multiplicatif.

***ii)*** Montrer que $G$ est engendré par $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

***iii)*** Montrer que tout endomorphisme surjectif du groupe $G$ est bijectif.

**30.** [PLSR] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\det(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = \gamma > 2$.
Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$, on pose $(k, U) = \begin{pmatrix} A^k & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

***a)*** Montrer que l'ensemble $G_A = \{(k, U)\ ;\ k \in \mathbb{Z},\ U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})\}$ est un groupe pour la loi de multiplication matricielle. Est-il abélien ?

***b)*** Montrer l'existence d'un morphisme injectif de groupes de $G_A$ dans le groupe

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

***c)*** Soit $D_A$ le sous-groupe de $G_A$ engendré par les éléments $ghg^{-1}h^{-1}$ où $(g, h) \in G_A^2$. Montrer que $D_A = \{(0, (I_2 - A)U),\ U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})\}$.

**31.** [L] ***a)*** Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \ldots, F_r) \in \mathbb{C}(X)^r$. On pose $M_r = (F_j^{(i-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}(X))$. Montrer que la famille $(F_1, \ldots, F_r)$ est liée si et seulement si la matrice $M_r$ n'est pas inversible.

***b)*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(X))$.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $A^{(p)} = (A_{i,j}^{(p)})$ la matrice des dérivées $p^{\text{èmes}}$ des coefficients de $A$.
Montrer que les matrices $A^{(p)}$ pour $p \in \mathbb{N}$ commutent deux à deux si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $(F_1, \ldots, F_r) \in (\mathbb{C}(X))^r$ et des matrices $C_1, \ldots, C_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux telles que $A = F_1 C_1 + \cdots + F_r C_r$.

**32.** [SR] Soit $S = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

***a)*** Justifier la diagonalisabilité de $S$ et donner ses valeurs propres.

***b)*** Donner une base orthonormale de vecteurs propres de $S$.

***c)*** Caractériser les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par $S$.

***d)*** Soient $\omega = \exp(2i\pi/n)$ et $A = \left(\dfrac{\omega^{jk}}{\sqrt{n}}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer les puissances de $A$. En déduire que $A$ est diagonalisable.
***e)*** On suppose $n$ impair. Déterminer les valeurs propres de $A$ et leurs multiplicités.

**33.** [SR] ***a)*** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant $n$ valeurs propres distinctes. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est suffisamment proche de $M$, alors $N$ admet $n$ valeurs propres distinctes.
***b)*** Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. À quelle condition la matrice $A + \varepsilon B$ admet-elle deux valeurs propres distinctes pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit ?
***c)*** Même question en demandant que $A + \varepsilon B$ soit diagonalisable pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit.

**34.** [L] Soient $\mathbb{K}$ un corps et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que $\chi_A$ est irréductible et qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $B^{-1}AB$ commute avec $A$, mais que $B$ ne commute pas avec $A$. Montrer que $B^2$ est scalaire.

**35.** [L] Soient $A, B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}(AB - BA) = 1$. Montrer que $A$ et $B$ sont cotrigonalisables.

**36.** [PLSR] Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 1$ et $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Im}\,B$.
***a)*** Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$ et $B = P\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$.
***b)*** Pour $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, on pose $\Psi_{P,Q} : M \mapsto PMQ$. On pose $\tau : M \mapsto M^T$.
Soit $\Psi \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)$ qui conserve le rang. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Psi = \Psi_{P,Q}$ ou $\Psi = \Psi_{P,Q} \circ \tau$.

**37.** [PLSR] Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$. Montrer que $M$ est diagonalisable si et seulement si $A$ et $B$ sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ telle que $C = AX - XB$.

**38.** [PLSR] Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de Bourdaud si $\chi_M = \prod_{i=1}^{n}(X - m_{i,i})$.
***a)*** Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice de Bourdaud si et seulement si elle est trigonalisable sur $\mathbb{K}$.
***b)*** Montrer qu'une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est de Bourdaud si et seulement si elle est diagonale.
***c)*** Est-il vrai que toute matrice de Bourdaud de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ?
***d)*** On dit que $A$ est normale si $A^TA = AA^T$. Déterminer les matrices réelles normales et de Bourdaud.

**39.** [SR] Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$.
On pose $e^M = \begin{pmatrix} M_1 & \varphi_{A,B}(C) \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}$.

***a)*** Déterminer $M_1, M_2, M_3$.
***b)*** Montrer que $\varphi_{A,B}$ est linéaire.
***c)*** Montrer que, si $A$ et $B$ sont diagonalisables, alors $\varphi_{A,B}$ l'est aussi, et préciser son spectre.
***d)*** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{x-y}$ si $x \neq y$, et $f(x,x) = e^x$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
***e)*** On suppose que $\varphi_{A,B}$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont distinctes. Montrer que $A$ et $B$ sont diagonalisables.

**40.** [SR] Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[A,B] = AB - BA$.
Soit $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
***a)*** Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ stable par [ , ].
***b)*** Calculer les $[A,B]$ pour les $A, B \in \{X, Y, H\}$ où $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
***c)*** Soit $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ linéaire telle que, pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, $\rho([A,B]) = [\rho(A), \rho(B)]$.
Montrer que $\rho(H)$ admet une valeur propre $\alpha$.
Montrer que $\rho(X)(E_\alpha(\rho(H))) \subset \mathrm{Ker}\,(\rho(H) - (\alpha+2)I_n)$.
Montrer que $\rho(Y)\,(E_\alpha(\rho(H))) \subset \mathrm{Ker}\,(\rho(H) - (\alpha-2)I_n)$.
***d)*** On suppose que, si $V$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ stable par tous les $\rho(A)$, pour $A \in \mathcal{A}$, alors $V = \mathbb{C}^n$ ou $V = \{0\}$. Déterminer les $\rho$ possibles.

**41.** [U] Soient $k$ un corps de caractéristique nulle, $E$ un $k$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On écrit $\pi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} P_i^{n_i}$, le polynôme minimal de $u$, où les $P_i$ sont irréductibles distincts et les $n_i$ dans $\mathbb{N}^*$. On pose $f = P_1 \times \cdots \times P_r$. On définit une suite en posant $u_0 = u$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - f(u_n)\, f'(u_n)^{-1}$.
***a)*** Montrer que $(u_n)$ est bien définie.
***b)*** Montrer que $(u_n)$ est stationnaire de valeur ultime $d \in \mathcal{L}(E)$ où $d$ est un polynôme en $u$, $u - d$ est nilpotent et $d$ est annulé par $f$.

**42.** ★★ [L] Déterminer le cardinal minimal $p$ d'un sous-groupe $G$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Vect}(G) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si $G_1$ et $G_2$ conviennent et sont de cardinal $p$, sont-ils conjugués ?

**43.** ★ [L] On dit que la propriété $MT(n, \mathbb{K})$ est vraie si, pour tout couple $(A,B)$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ soit diagonalisable, $A$ et $B$ commutent.
***a)*** Montrer que, si $A$ et $B$ sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonalisables et commutent, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable.
***b)*** On suppose que $n \geqslant 2$. La propriété $MT(n, \mathbb{R})$ est-elle vraie ?
***c)*** Montrer que $MT(2, \mathbb{C})$ est vraie.
***d)*** On suppose que $n \geqslant 2$. La propriété $MT(n, \mathbb{F}_2)$ est-elle vraie ?
***e)*** Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier. La propriété $MT(2, \mathbb{F}_p)$ est-elle vraie ?

**44.** [L] Quelle est l'image de l'application $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M^{2n+1}$ ?

**45.** [SR] ***a)*** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Justifier que $e^{A+B} = e^A e^B$.
***b)*** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $e^{PAP^{-1}} = P\, e^A\, P^{-1}$.
***c)*** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ convenable, on pose $\log A = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (A - I_n)^k$. Pour quelles matrices $\log A$ est-il défini ? Montrer les égalités $\exp(\log A) = A$ et $\log(\exp A) = A$. Pour chaque égalité, déterminer les matrices $A$ qui la satisfont.
***d)*** Montrer que, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\left(e^{\frac{A}{k}}\, e^{\frac{B}{k}}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} e^{A+B}$.

**46.** ★★ [PLSR] Soient $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence égal à $+\infty$.
***a)*** Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, justifier la définition de $f^*(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k$.
***b)*** Montrer que $f^*$ est continue.
***c)*** On suppose que $f$ est surjective. Montrer que $f$ induit une surjection de l'ensemble des matrices diagonalisables sur lui-même.
***d)*** On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda$ et $f'(z) \neq 0$. Montrer que $f^*$ est une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lui-même.

**47.** [L] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique.
Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe un ensemble $F_n \subset \mathbb{R}^d$ de cardinal $n$ tel que, pour toute partie $G$ de $F_n$, il existe $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $G = \{x \in F_n,\ \langle \omega, x\rangle + b > 0\}$.

**48.** [P] Pour $\omega \in \mathbb{R}$, on pose $R(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu. Montrer qu'il existe $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = P \begin{pmatrix} e^{tR(\omega_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{tR(\omega_r)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_{n-2r} \end{pmatrix}.$$

**49.** ★★ [L] Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes autoadjoints positifs d'un espace euclidien. Montrer que $v \circ u$ est diagonalisable.

**50.** ★ [P] Déterminer l'ensemble des symétries linéaires sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui fixent un hyperplan et stabilisent l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**51.** ⋆⋆ [P] Soit $H = (H_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tous $i \neq j$, $H_{i,j} \leqslant 0$. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on dit que $i$ et $j$ sont connectés s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \dots, k_m \in [\![1,n]\!]$ tels que $k_1 = i$, $k_m = j$ et, pour tout $\ell \in [\![1, m-1]\!]$, $H_{k_\ell, k_{\ell+1}} \neq 0$.
Montrer que $i$ et $j$ sont connectés si et seulement si $H^{-1}_{i,j} > 0$, où $H^{-1}_{i,j}$ est le coefficient d'indice $(i,j)$ de $H^{-1}$.

**52.** [PLSR] On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})^2$. On pose $C = AB$ et on s'intéresse aux valeurs propres réelles de $C$.
***a)*** Donner un exemple de $n, A$ et $B$ tels que $\chi_C$ n'admette aucune racine réelle.
***b)*** On suppose $A$ inversible. On note $\varphi : (\mathbb{C}^{2n})^2 \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(X,Y) = X^T A^{-1} Y$. Montrer que les sous-espaces caractéristiques $F_\lambda(C)$ de $C$ sont deux à deux $\varphi$-orthogonaux, i.e. pour tous $\lambda$ et $\mu$ distinctes dans $\operatorname{Sp} C$, $\forall (X,Y) \in F_\lambda(C) \times F_\mu(C),\ \varphi(X,Y) = 0$.
***c)*** Que peut-on en déduire ?

**53.** [PLSR] On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure canonique d'espace euclidien orienté, et on note $\mathbf{B}$ sa base canonique.
***a)*** Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique endomorphisme $z_u$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ \det_{\mathbf{B}}(u,x,y) = \langle z_u(x), y\rangle$, et montrer qu'alors $z_u^\star = -z_u$.
***b)*** Soient $u \in \mathbb{R}^3$ unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$. On munit le plan $\{u\}^\perp$ de l'orientation dont les bases directes sont les bases $(x,y)$ de $\{u\}^\perp$ telles que $(x,y,u)$ soit une base directe de $\mathbb{R}^3$. On note $r_{u,\theta}$ la rotation de $\mathbb{R}^3$ fixant $u$ et induisant sur $\{u\}^\perp$ la rotation d'angle de mesure $\theta$. On note enfin $p_u$ la projection orthogonale sur $\mathbb{R}u$. Exprimer $\operatorname{tr}(r_{u,\theta})$ en fonction de $\theta$, et montrer que $r_{u,\theta} = (\cos\theta).\operatorname{id} + (1-\cos\theta).p_u + (\sin\theta).z_u$.
***c)*** Soient $u, v$ des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$. On pose $\tau = \arccos(\langle u, v\rangle)$. Soit $(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que $r_{u,\varphi} \circ r_{v,\psi}$ est une rotation, et montrer qu'elle s'écrit $r_{w,\theta}$ pour un vecteur unitaire $w$ et un réel $\theta$ vérifiant $|\cos(\theta/2)| = |\cos(\varphi/2)\cos(\psi/2) - \cos(\tau)\sin(\varphi/2)\sin(\psi/2)|$.

**54.** [PLSR] ***a)*** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables et telles que $AB = BA$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $PAP^{-1}$ et $PBP^{-1}$ soient diagonales.
***b)*** Montrer que l'application $\Phi : (S,O) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto SO \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est bien définie et bijective, et que $\Phi^{-1}$ est continue.
***c)*** Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $M_0 = M$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ M_{k+1} = \dfrac{M_k}{2}(I_n + (M_k^T M_k)^{-1})$, et étudier sa convergence.

**55.** ⋆⋆ [PLSR] On pose $V = \{1, 2, \dots, n\}$ et $F = \mathcal{P}_2(V)$ l'ensemble des paires de $V$. Soient $E \subset F$ et $n_i = |\{j \in V,\ \{i,j\} \in E\}|$ pour $i \in V$. On définit la matrice $L = (\ell_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\ell_{i,j} = n_i$ si $i = j$, $-1$ si $\{i,j\} \in E$ et 0 sinon. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres (avec multiplicité) de $L$.
***a)*** Montrer que $\lambda_1 = 0$.
***b)*** Montrer que $\lambda_2 = \displaystyle\min_{X \in \{(1,\dots,1)\}^\perp \setminus \{0\}} \frac{X^T L X}{X^T X}$.
***c)*** Pour $S \subset V$, on note $\partial S = \{\{i,j\},\ \{i,j\} \in E \text{ avec } i \in S \text{ et } j \notin S\}$.
Montrer que $\dfrac{\lambda_2}{2} \leqslant \displaystyle\min_{\substack{S \subset V \\ 0 < |S| \leqslant \frac{n}{2}}} \frac{|\partial S|}{|S|}$.

**56.** [P] Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on note $A \geqslant B$ lorsque $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on écrit $A = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et les $\lambda_i > 0$, et on pose, pour $r \in \mathbb{R}$, $A^r = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1^r, \ldots, \lambda_n^r)P^{-1}$ ; cette définition ne dépend pas de l'écriture de $A$ sous la forme précédente.
***a)*** Montrer que $M \mapsto M^{-1}$ est décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
***b)*** Est-ce que $M \mapsto M^2$ est croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ?
***c)*** Montrer que $M \mapsto M^r$ est convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque $r \in [-1, 0]$. Ceci signifie que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et tout $t \in ]0, 1[$, $(tA + (1-t)B)^r \leqslant tA^r + (1-t)B^r$.

**57.** [PLSR] On dit d'une norme $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ qu'elle est invariante orthogonalement lorsque $\forall M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \forall (P, Q) \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})^2,\ \mathcal{N}(M) = \mathcal{N}(PMQ)$.
***a)*** Donner un exemple d'une telle norme.
***b)*** Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $(P, Q) \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})^2$ tel que $A = PDQ$ où $D = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$ avec $\forall i \in [\![1, r]\!],\ \sigma_i > 0$.
***c)*** On se donne une norme $\mathcal{N}$ invariante orthogonalement sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
On note $T(A) = \sup\{\|AX\|\,,\ \|X\| = 1\}$ où $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow T(A) = \alpha\,\mathcal{N}(A)$.

**58.** [SR] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur qui lui est subordonnée.
***a)*** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
  ***i)*** Que dire des valeurs propres et des espaces propres de $A$ ?
On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de $A$.
  ***ii)*** Soient $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y = Ax - \alpha x$. Montrer que $\displaystyle\min_{1 \leqslant i \leqslant r} |\lambda_i - \alpha| \leqslant \frac{\|y\|}{\|x\|}$.
***b)*** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de $A$. Soient enfin $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha$ une valeur propre de $A + B$. Montrer que $\displaystyle\min_{1 \leqslant i \leqslant r} |\lambda_i - \alpha| \leqslant \|P\|_{\mathrm{op}}\,\|P^{-1}\|_{\mathrm{op}}\,\|B\|_{\mathrm{op}}$.

**59.** Soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $SA$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

**60.** ★★ [P] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ toute application $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $G$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les éléments de $G$. Montrer que les formes quadratiques invariantes par $G$ constituent une droite vectorielle.

**61.** [SR] Soit $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $\nabla_H : (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto x^T H y$ et $Q_H : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x^T H x$.
***a)*** Soit $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la norme d'opérateur de $H$ à l'aide de $Q_H$.
***b)*** Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de leur structure euclidienne canonique. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, comment déterminer la norme d'opérateur de $A$ pour ces normes ?

***c)*** Soient $J, K$ deux ensembles finis non vides, $(a_{j,k})_{(j,k)\in J\times K} \in (\mathbb{R}^+)^{J\times K}$. On suppose qu'il existe $C_1$ et $C_2$ tels que : $\forall j \in J$, $\displaystyle\sum_{k\in K} a_{j,k} \leqslant C_1$ et $\forall k \in K$, $\displaystyle\sum_{j\in J} a_{j,k} \leqslant C_2$. On ordonne $J$ et $K$ et on note $A$ la matrice des $a_{j,k}$. Montrer que $\|A\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sqrt{C_1C_2}$.

***d)*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J = K = [\![1, n]\!]$, on pose, pour $1 \leqslant j, k \leqslant n$, $a^n_{j,k} = \dfrac{1}{(j-k)^2}$ si $j \neq k$, et $a^n_{j,k} = 0$ sinon. On note enfin $A^n = \left(a^n_{j,k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de $(\|A^n\|_{\mathrm{op}})_{n\geqslant 1}$.

**62.** ⋆⋆ [PLSR] L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée notée $\| \ \|_{\mathrm{op}}$. Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on définit le conditionnement de $M$ comme le réel $\mathrm{cond}(M) = \|M\|_{\mathrm{op}}\|M^{-1}\|_{\mathrm{op}}$.

***a)*** Calculer $\mathrm{cond}(M)$ dans le cas où $M$ est symétrique définie positive.

***b)*** Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{cond}(M) \geqslant 1$ et $\mathrm{cond}(M^T) = \mathrm{cond}(M)$.

***c)*** Que dire des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{cond}(M) = 1$ ?

***d)*** Pour $A$ et $B$ dans $S_n^{++}$, montrer que $\mathrm{Cond}(A + B) \leqslant \max(\mathrm{Cond}(A), \mathrm{Cond}(B))$.

**63.** [SR] On note $E$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ de rang 1.

***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in E$ si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A = UU^T$.

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, E)$.

***b)*** Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

$(\alpha)$ il existe $u : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $a(t) = u(t)u(t)^T$ ;

$(\beta)$ il existe $z : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $z(t)^T a(t)z(t) > 0$.

***c)*** Soient $0 \leqslant b \leqslant c$. On suppose qu'il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que, pour tout $t \in [b, c]$, $a_{i,i}(t) > 0$ et $a_{j,j}(t) > 0$. Montrer qu'il existe $z : [b, c] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in [b, c],\ z(t)^T a(t)z(t) > 0$ et, en outre, $z(b) = e_i$, $z(c) = \pm e_j$ (les $e_k$ sont les vecteurs de la base canonique).

***d)*** En considérant l'ensemble des $d \geqslant 0$ tels qu'existe $z : [0, d] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue vérifiant $\forall t \in [0, d],\ z(t)^T a(t)z(t) > 0$ et $z(d) = \pm e_j$, montrer que $a$ vérifie la propriété $(\alpha)$.

**64.** [SR] Soient $n \geqslant 2$, $a : [0, 1] \to \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ continue et $A = \displaystyle\int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t$.

***a)*** Montrer que $A$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

***b)*** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A = 0$. Exprimer $\mathrm{Ker}(A)$.

***c)*** Montrer que $M = \left(\dfrac{1}{1+i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

***d)*** On suppose $a$ à valeurs dans l'ensemble des matrices de projecteurs orthogonaux. Donner une condition pour que $A$ soit une matrice de projecteur orthogonal.

***e)*** Soit $\Gamma : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$. Soient $0 < \alpha < \beta$.

Montrer que $\begin{pmatrix} \Gamma(2\alpha) & \Gamma(\alpha+\beta) \\ \Gamma(\alpha+\beta) & \Gamma(2\beta) \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

***f)*** En déduire que $\ln(\Gamma)$ est convexe.

***Analyse***

**65.** ★★ [P] Soit $(O_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'ouverts non majorés de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $O_n \cap \mathbb{N}x$ soit infini.

**66.** [L] Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $d : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $x, y, z \in E$ :
***i)*** $d(x,y) = d(y,x)$, ***ii)*** $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, ***iii)*** $d(x,y) \leqslant \max\left(d(x,z),\, d(z,y)\right)$.
Ainsi $d$ est une distance sur $E$.
Pour $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}^{+}$, on note $B(x,r) = \{y \in E,\ d(x,y) \leqslant r\}$ la boule fermée de centre $x$ et de rayon $r$. On suppose que, pour tout $x \in E$ et tous $r, r'$ vérifiant $0 < r < r'$, on a $B(x,r) \subsetneq B(x,r')$. Enfin, on suppose qu'il existe une suite d'éléments de $E$ dense dans $(E,d)$.
Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $E$ et une suite $(r_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B(z_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(z_n, r_n)$ et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(z_n, r_n) = \emptyset$.

**67.** [PLSR] On note $E$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
***a)*** Pour $\alpha \in \left]0,1\right]$ et $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Démontrer que $\| \ \|_\alpha$ est une norme sur $E$.
***b)*** On note $F = E \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Démontrer que $F$ est un fermé de $E$ pour la norme $\| \ \|_1$.

**68.** ★★ [P] Soient $E$ l'espace des suites réelles $(x_n)_{n\geqslant 0}$ nulles à partir d'un certain rang, et $T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $T$ continu pour la norme $\| \ \|_1$ et pour la norme $\| \ \|_\infty$. Montrer que $T$ est continu pour la norme $\| \ \|_2$.

**69.** [SR] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.
***a)*** La forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(0)$ est-elle continue pour $\| \ \|_\infty$ ? pour $\| \ \|_1$ ? Dans chaque cas calculer l'adhérence de $\operatorname{Ker}\varphi$.
***b)*** Soit $\varphi : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)\cos(2\pi x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\varphi$ est continue pour $\| \ \|_1$ et calculer sa norme subordonnée.

**70.** [L] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.
Si $a = (a_n)_{n\geqslant 0} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, on pose, pour $f, g \in E$, $\langle f, g\rangle_a = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(a_n)\,g(a_n)}{2^n}$.
***a)*** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\langle\ ,\ \rangle_a$ soit un produit scalaire sur $E$. On note alors $\| \ \|_a$ la norme associée.
***b)*** Si $a, b \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ vérifient les hypothèses de ***a)***, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\| \ \|_a$ et $\| \ \|_b$ soient équivalentes.

**71.** Soient $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{x\})$ est compact.
***a)*** Montrer que $f$ admet un extremum global.

***b)*** Montrer que $f(x)$ possède une limite quand $\|x\| \to +\infty$.

**72.** ⋆⋆ [P] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension infinie et $K$ une partie bornée de $E$ dont la frontière est compacte. Montrer que $K$ est d'intérieur vide dans $E$. Peut-on généraliser le résultat à n'importe quel espace vectoriel normé de dimension infinie ?

**73.** [P] Pour $x, y$ réels et $\varepsilon > 0$, on dit que $x \approx_\varepsilon y$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - y - k| < \varepsilon$. Soient $\lambda_1, \lambda_2$ deux réels non nuls. Montrer que $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$ si et seulement si, pour tout $(a_1, a_2) \in [0, 1[^2$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x\lambda_1 \approx_\varepsilon a_1$ et $x\lambda_2 \approx_\varepsilon a_2$.

**74.** [P] Soient $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 2$ et $C$ une partie non vide, convexe et bornée de $E$. Montrer que la frontière de $C$ est connexe par arcs.

**75.** ⋆ [PLSR] Soient $E$ un espace vectoriel normé et $f : E \to E$ une application telle que $f(0) = 0$ et $\forall x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
On pose, pour $x, y \in E$, $df(x, y) = \left\| \dfrac{f(x) + f(y)}{2} - f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \right\|$.
***a)*** Montrer que $\forall x, y \in E$, $df(x, y) \leqslant \dfrac{1}{2}\|x - y\|$.
***b)*** Montrer que $f$ est linéaire si et seulement si $df$ est identiquement nulle.
***c)*** Trouver une fonction vérifiant les propriétés de la fonction $f$, non linéaire et non surjective.
***d)*** On suppose que $f$ est surjective. Montrer que $f$ est linéaire.

**76.** [P] On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des normes $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$. Soit $(n_k)_{k \geqslant 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. Soit $F = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto x^{n_k},\ k \geqslant 0)$. À quelle condition $F$ est-il dense dans $E$ pour la norme $\|\ \|_2$ ? pour la norme $\|\ \|_\infty$ ?

**77.** ⋆⋆ [L] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $D = \{\ell 2^{-k} + 2^{-k}[0, 1]\ ;\ (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour tout intervalle $I$ de $D$, on note $\mathrm{long}(I)$ la longueur de $I$ et on pose $M_I(f) = \dfrac{1}{\mathrm{long}(I)} \displaystyle\int_I f$. On pose $\|f\| = \sup \left\{ \dfrac{1}{\mathrm{long}(I)} \displaystyle\int_I |f - M_I(f)|\ ;\ I \in D \right\}$.
***a)*** On suppose $\|f\|$ finie. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $(I, J) \in D^2$ avec $I \subset J$ tels que $\mathrm{long}(J) = 2^m \mathrm{long}(I)$. Démontrer que $|M_I(f) - M_J(f)| \leqslant 2m\|f\|$.
***b)*** On suppose que $\|f\| = 1$ et $M_{[0,1]}(f) = 0$.
On note $F_k = \{I \in D\ ;\ I \subset [0, 1],\ M_I(f) > 5k$ et $I$ maximal pour cette propriété$\}$. On pose $\Omega_k = \displaystyle\bigcup_{I \in F_k} I$ et et $\mathrm{long}(\Omega_k) = \displaystyle\sum_{I \in F_k} \mathrm{long}(F_I)$.
Montrer que, pour $k \geqslant 1$, $\mathrm{long}(\Omega_k) \leqslant \dfrac{1}{3}\mathrm{long}(\Omega_{k-1})$.

**78.** ⋆⋆ [PLSR] On munit les espaces $\ell^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ et $\ell^2_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ de leurs normes usuelles $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$.
On pose $H = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\ ;\ \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^2(1 + n^2) < +\infty \right\}$.
***a)*** Définir un produit scalaire sur $H$. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

***b)*** Quelles inclusions a-t-on entre $\ell^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, $\ell^2_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ et $H$ ? Montrer que ces inclusions sont continues (i.e. les injections canoniques sont continues).
***c)*** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Montrer que $u \in H$ si et seulement si l'application $\mu_u : H \to H$ définie par $\forall v \in H,\ \mu_u(v) = u * v$ avec $(u * v)_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} u_p v_q$ est bien définie et continue.

**79.** ★★ [P] On note $\ell^1$ l'ensemble des suites sommables de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On munit $\ell^1$ de la norme définie, pour $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$, par $\|u\|_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
Soient $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1$ et $u \in \ell^1$. Montrer l'équivalence entre :
***i)*** la suite $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $u$ pour la norme $\|\ \|_1$,
***ii)*** pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n\, u^k_n \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n u_n$.

**80.** [L] On note $S = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et $\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], S)\ ;\ \gamma(0) = \gamma(1) = 1\}$.
***a)*** Soit $\gamma \in \Gamma$, montrer qu'il existe $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall t,\ \gamma(t) = e^{i2\pi\theta(t)}$.
***b)*** On prend $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$. On note $F$ la propriété :
« il existe $h \in \mathcal{C}([0,1]^2, S)$ tel que $\forall x \in [0,1],\ h(x,\cdot) \in \Gamma$, $h(0,\cdot) = \gamma_0$ et $h(1,\cdot) = \gamma_1$ ».
On pose $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_1 : t \mapsto e^{2i\pi t}$. Montrer que $\gamma_0$ et $\gamma_1$ ne vérifient pas $F$.
***c)*** On note $D$ le disque fermé unité de $\mathbb{C}$. Existe-t-il $f \in \mathcal{C}^0(D, S)$ telle que $f|_S = \mathrm{id}$ ?

**81.** [PLSR] ***a)*** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$.
On définit par récurrence une suite $(x_k)$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $x_0 \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$, la suite $(x_k)$ est bien définie et converge vers $x^*$.
***b)*** Avec $f : x \mapsto e^x - 1$, quelles sont les valeurs de $x_0 \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite $(x_k)$ précédente est stationnaire ?
***c)*** On revient au cas général et on suppose $f'' > 0$ et $f'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $x_0 \in \mathbb{R}$ la suite $(x_k)$ est-elle stationnaire ?

**82.** [L] Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],[a,b])$. On suppose dans les questions ***a)*** et ***b)*** que $f$ n'a pas de point de période 2, c'est-à-dire que $\forall x \in [a,b], f(x) \neq x \Rightarrow (f\circ f)(x) \neq x$.
***a)*** Soit $c \in\ ]a,b[$ tel que $f(c) > c$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k(c) > c$.
***b)*** Soit $x_0 \in [a,b]$, on pose pour tout $n$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Démontrer que la suite $(x_n)$ converge.
***c)*** Démontrer que la suite $(x_n)$ converge pour tout choix de $x_0$ si et seulement si $f$ n'a pas de point de période 2.

**83.** ★ [PLSR] ***a)*** Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{\sin n}{n}, \sum \frac{\sin^2 n}{n}, \sum \frac{|\sin n|}{n}$.
***b)*** Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in [\![1, Q]\!]$ tels que $|qx - p| \leqslant \dfrac{1}{Q}$.
En déduire qu'il existe une infinité de couples $(p,q)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{q^2}$.

***c)*** On admet que $\pi$ est irrationnel. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n\sin(n)}$.

**84.** [P] Soit $(a_n)$ une suite de réels décroissante de limite nulle.
Pour $P \subset \mathbb{N}$, on note $A(P) = \sum_{n\in P} a_n$. On suppose $A(\mathbb{N}) = A_\infty \in \mathbb{R}$. Montrer que $\{A(P),\ P \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\} = [0, A_\infty]$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

**85.** $\star$ [L] ***a)*** Pour quels réels $s$ la somme $\displaystyle\sum_{\substack{n,m\in\mathbb{N}^*\\ n\neq m}} \frac{|n-m|^s}{nm(n^2-m^2)^2}$ est-elle finie ?

***b)*** Pour $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, on note $|n| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$.
Pour quels réels $s$ la somme $\displaystyle\sum_{\substack{(n,m)\in(\mathbb{Z}^2\setminus\{0\})^2\\ n\neq m}} \frac{|n-m|^s}{|n||m|(1+(|n|-|m|)^2)}$ est-elle finie ?

**86.** $\star$ [PLSR] On note $S$ l'ensemble des suites croissantes à termes dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
***a)*** Pour $a \in S$, montrer que $\varphi(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} \right)$ appartient à $]0, 1]$.
***b)*** Montrer que $\varphi$ définit une bijection de $S$ sur $]0, 1]$.
***c)*** Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in S$ pour que $\varphi(a) \in \mathbb{Q}$.

**87.** [L] Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+*}$ décroissante de limite nulle. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une unique suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} f(n_i)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $n_{i+1} \geqslant \varphi(n_i)$.
Montrer que $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n-1) = \sum_{i=0}^{+\infty} f\left(\varphi^i(n)\right)$, où $\varphi^i$ désigne l'itérée $i$-ème de $\varphi$ pour la composition des applications.

**88.** [P] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :
***i)*** $f(x) \underset{x\to 0}{=} O(x)$ ;
***ii)*** $\sum f(a_n)$ converge absolument pour toute série $\sum a_n$ absolument convergente à termes réels.
***iii)*** $\sum f(a_n)$ converge pour toute série $\sum a_n$ absolument convergente à termes réels.

**89.** [P] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\sum f(a_n)$ converge pour toute série convergente $\sum a_n$ à termes réels. Montrer qu'il existe un réel $\lambda$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour $x$ voisin de 0.

**90.** [SR] ***a)*** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to [a, b]$.
***i)*** Si $f$ est continue, montrer que $f$ possède un point fixe.

***ii)*** Si $f$ est croissante, montrer que $f$ possède un point fixe.
***b)*** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que l'ensemble $\text{dis}(f)$ des points de discontinuité de $f$ est au plus dénombrable.
***c)*** Construire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{Q}$.

**91.** $^\star$ [P] Trouver les $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

**92.** [PLSR] Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement égale à $+\infty$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $f^*(y) = \sup\{xy - f(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$.
***a)*** Montrer que $\{x \in \mathbb{R},\ f^*(x) < +\infty\}$ est un intervalle (éventuellement vide) sur lequel $f^*$ est convexe.
***b)*** Montrer que, si $f$ est dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$, alors $f^{**} = f$.
***c)*** On suppose que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$, que $f'' > 0$ sur $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{f(x)}{|x|} \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Montrer que $f^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y = f'(x) \Leftrightarrow x = (f^*)'(y)$.

**93.** $^\star$ [SR] Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on pose $B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
***a)*** Calculer $B_n(u_1)$ et $B_n(u_2)$ où $u_n : x \mapsto x^n$.
***b)*** Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$.
***c)*** En déduire que si $f$ est $M$-lipschitzienne, alors $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{M}{2\sqrt{n}}$ pour tout $x$.

**94.** $^\star$ [L] Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
- $f$ est croissante, à valeurs dans $[0,1]$, $f$ est continue à droite,
- $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0, \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists b_k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^k = f(x + b_k)$.

**95.** [PLSR] ***a)*** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|b| < \pi$.
Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + e^z = a + ib$.
***b)*** Montrer que l'application $z \mapsto z\, e^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

**96.** [P] Soient $\sigma > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :
$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) + f(y) - f(x+y)| \leqslant \sigma$. Montrer que $f$ est la somme d'une fonction linéaire $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et d'une fonction bornée par $\sigma$.

**97.** $^{\star\star}$ [L] Une partie $E$ de $[0,1]$ est dite négligeable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ d'intervalles de $[0,1]$ dont la réunion contient $X$ et dont la somme des longueurs est majorée par $\varepsilon$. Soit $f$ une fonction dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une partie négligeable $E$ de $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in [0,1] \setminus E$, on ait $f'(x) \geqslant 0$. Montrer que $f$ est croissante.

**98.** ★ [P] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ et $(Q_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ deux familles de polynômes réels, $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x)\, e^{Q_k(x)}$. Montrer que, si $f$ n'est pas identiquement nulle, alors $f$ ne possède qu'un nombre fini de zéros.

**99.** [P] Soit $n$ un entier impair supérieur ou égal à 3. Déterminer les fonctions continues $f$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\int_0^1 (f(x^{1/k}))^{n-k}\,\mathrm{d}x = \dfrac{k}{n}$.

**100.** ★★ [P] Soit $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels positifs telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $ka_k \leqslant (k+1)a_{k+1}$. Montrer que $\int_0^{\pi} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left( a_k \dfrac{|\sin(kx)|}{x} \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{k} + O(1)$.

**101.** ★ [PLSR] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

***a)*** Quelle est la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ? Déterminer la vitesse de convergence.

***b)*** On suppose désormais $f$ 1-périodique et de classe $C^2$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geqslant 1$, $\left| S_n - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \dfrac{C}{n^2}$.

***c)*** On suppose désormais $f$ 1-périodique et de classe $C^3$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geqslant 1$, $\left| S_n - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \dfrac{C}{n^3}$.

***d)*** Que dire si $f$ est 1-périodique et de classe $C^\infty$ ?

**102.** ★★ [P] Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f$ une fonction continue de $[a,b] \times [-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $I(\lambda) = \int_a^b f(t, \sin(\lambda t))\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I(\lambda)$ admet une limite que l'on déterminera lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$.

**103.** ★ [SR] Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{C}^N$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on note $e(y) = e^{2i\pi y}$. Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{N} x_n e(nt)$. Soient $R \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1,\ldots,t_R) \in \mathbb{R}^R$.

***a) i)*** Montrer que $\sum_{r=1}^{R} |f(t_r)|^2 \leqslant NR \sum_{k=1}^{N} |x_k|^2$.

***ii)*** Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

***b)*** Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\Delta(t) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |n-t|$. On suppose les $t_i$ distincts. Soit $\delta > 0$ tel que $\delta \leqslant \min_{1\leqslant i\neq j\leqslant R} \Delta(t_i - t_j)$. Montrer que $\sum_{r=1}^{R} |f(t_r)|^2 \leqslant (2N\pi + \delta^{-1}) \sum_{k=1}^{N} |x_k|^2$.

*Ind.* On pourra montrer que, pour une fonction $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$,

$$|g(a)| \leqslant \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} |g(t)| \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_{a-h}^{a+h} |g'(t)| \,\mathrm{d}t.$$

**104.** [PLSR] On note $E$ l'ensemble des fonctions 1-périodiques et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n(f) = \displaystyle\int_0^1 e^{-2in\pi t} f(t) \,\mathrm{d}t$.
***a)*** Montrer que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
***b)*** On suppose que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g \in E$ telle que
$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = g(t)\,(e^{2i\pi t} - 1)$.

**105.** [P] Soient $a, b > 0$ et $m \in \mathbb{Z}$. Calculer $I_m(a, b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax-\frac{b}{x}} x^{m-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$.

**106.** [L] Soit $n \geqslant 2$. Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{t^2 A} \mathrm{d}t$ converge.

**107.** ★★ [PLSR] Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$, $f(x) = 0$.
***a)*** Montrer que $\varepsilon \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$ admet une limite en $0^+$.
On note $\mathrm{vp}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x\right)$ cette limite.
***b)*** On note $T_f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(y) \ln|y - x| \mathrm{d}y + \int_{x}^{+\infty} f(y) \ln|y - x| \mathrm{d}y$. Justifier que $T_f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
***c)*** On suppose $f$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $T_f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (T_f)'(x) = \mathrm{vp}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y + x)}{y} \mathrm{d}y\right).$$

**108.** [SR] ***a)*** Pour $(p, k) \in \mathbb{N}^2$, montrer la convergence de $I_{p,k} = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{y^k x^p}{1 - xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ et l'exprimer sous forme de la somme d'une série numérique.
***b)*** On note $d_n = \mathrm{ppcm}(1, \ldots, n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_{p,k} \in \dfrac{1}{d_p^2}\mathbb{Z}$ si $p > k$, et $I_{p,p} \in \zeta(2) + \dfrac{1}{d_p^2}\mathbb{Z}$.
***c)*** On pose $P_n = \dfrac{1}{n!} D^n(X^n(1 - X)^n)$. Montrer que $P_n$ est à coefficients entiers.
***d)*** Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1 - y)^n P_n(x)}{1 - xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ converge, et en donner une expression simplifiée.

***e)*** Montrer que $I_n \in \dfrac{1}{d_n^2}\,(\mathbb{Z} + \zeta(2)\mathbb{Z})$.

**109.** [L] Déterminer les segments $S$ de $\mathbb{R}$ non réduits à un point tels que l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de $S$ dans $\mathbb{R}$ soit dense dans $(\mathcal{C}^0(S,\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$.

**110.** [L] On note $E$ l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant pour limites respectives 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Soient $F, G, H \in E$, avec $G$ et $H$ continues.
On suppose qu'il existe quatre suites réelles $a, b, c, d$ telles que $(x \mapsto F(a_n x + b_n))_n$ et $(x \mapsto F(c_n x + d_n))_n$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$, respectivement vers $G$ et $H$. Montrer qu'il existe deux réels $\lambda > 0$ et $\mu$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = G(\lambda x + \mu)$.

**111.** [L] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[0,1]$ dans $]0,1]$, convergeant simplement vers une fonction $f$.

***a)*** Pour $n \geqslant 2$, on pose $t_n = \dfrac{1}{\ln n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{i}$. Montrer que la suite $(t_n)$ converge simplement vers $f$.

***b)*** On suppose que $f_0$ est à valeurs strictement positives et que, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction $f_n$ est dérivable, croissante et que $f_n' \geqslant \dfrac{n f_n}{\sigma_n}$, où $\sigma_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f_i$. On suppose également que $\displaystyle\sup_{n\geqslant 1} \sigma_n(1/2) < +\infty$. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1/2[$, il existe $C_x > 0$ tel que, pour tout $n$ assez grand, $f_n(x) \leqslant e^{-C_x n}$.

***c)*** On enlève l'hypothèse sur $\sigma_n(1/2)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que :
(i) $\forall x < x_0,\ \exists C_x > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ f_n(x) \leqslant e^{-C_x n}$ ;
(ii) $\forall x > x_0,\ f(x) \geqslant x - x_0$.

**112.** [P] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{4^n}\right)$.

***a)*** Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\inf\{f(t),\ t \geqslant x\}) = 0$.

***b)*** Montrer que $0 < \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sup\left\{\frac{|f(t)|}{\ln(\ln t)},\ t \geqslant x\right\}\right) < +\infty$.

**113.** [L] Soit $(\lambda_n)$ une suite de réels $> 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \leqslant 3\lambda_n$. Montrer que :

$$\forall \alpha > 0,\ \exists (c_1, c_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \forall t \in [1/2, 1[\,,\ \frac{c_1}{(1-t)^\alpha} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^\alpha t^{\lambda_n} \leqslant \frac{c_2}{(1-t)^\alpha}.$$

**114.** [SR] On pose : $\forall x > 0, \eta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

***a)*** Montrer que $\eta$ est de classe $C^\infty$ sur $]1, +\infty[$. Étudier sa limite en $+\infty$.

***b)*** Montrer que $\eta$ est de classe $C^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

***c)*** Calculer $\eta(1)$.
***d)*** Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1$.
***e)*** Montrer que $\eta(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathfrak{Re}\, z > 0$.

**115.** [P] ***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $L_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L_n(1) = 1$ et $(1 - X^2)L_n'' - 2XL_n' + n(n+1)L_n = 0$.

***b)*** Montrer que $\forall x \in [-1, 1],\ \forall z \in ]-1, 1[\,,\ \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) z^n$.

**116.** [PLSR] Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(1) = g(1) = 1$ et, pour tout $x \in [0, 1[$, $|f(x)| < 1$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $M \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 - f(1-x) \underset{x \to 0^+}{\sim} Cx^{1/M}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 g(x)\, f(x)^n \mathrm{d}x$.
***a)*** Déterminer un équivalent de $u_n$.
***b)*** Montrer l'existence de $C'$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{C'}{n}$.

**117.** [SR] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + tx\right) \mathrm{d}t$.
***a)*** Montrer la définition de $f$ sur $\mathbb{R}^+$.
***b)*** Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $\mathrm{Re}\left[\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(i\left(\frac{(t+i\varepsilon)^3}{3} + (t+i\varepsilon)x\right)\right) \mathrm{d}t\right] \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$.

**118.** [SR] On note $E$ l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{C}$.
***a)*** On convient que $\sqrt{+\infty} = +\infty$. Pour $f$ continue de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{C}$, montrer que

$$\sqrt{\int_0^{+\infty} |f|^2} = \sup\left\{\int_0^{+\infty} |fg|\ ;\ g \in E \text{ tel que } \int_0^{+\infty} |g|^2 = 1\right\}.$$

***b)*** Soit $f \in E$. Montrer que $\Phi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x} \mathrm{d}t$ appartient à $E$.

**119.** [P] Soient $K \in \mathcal{C}^0([0,1]^2, \mathbb{R})$ telle que $\|K\|_\infty < 1$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Étudier l'existence et l'unicité de $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0,1],\ g(x) - \displaystyle\int_0^1 K(x,t) g(t)\, \mathrm{d}t = f(x)$.

**120.** ★★ [L] Soient $\alpha, \theta \in ]0, 1[$. Pour $f : [1, +\infty[ \to [0, 1]$ continue, on pose $\|f\|_\alpha = \sup\limits_{s \geqslant 1} s^\alpha |f(s)|$ et $F_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, [0,1]),\ \|f\|_\alpha < +\infty\}$.
***a)*** Pour $f \in F_\alpha$, on pose

$$T(f) : s \geqslant 1 \mapsto 1 - \left(1 - \frac{1}{s}\right)^\theta + \theta(s-1)^\theta \int_1^{+\infty} (s + t - 1)^{-\theta - 1} f(t) \mathrm{d}t.$$

Montrer que $T$ est une application lipschitzienne de $F_\alpha$ dans $F_\alpha$ (pour $\|\ \|_\alpha$).

***b)*** On admet que, pour tout $\alpha \in ]0, 1-\theta[$, $T$ possède un unique point fixe $f_\alpha \in F_\alpha$. Montrer que $f_\alpha$ ne dépend pas de $\alpha$ ; on le note $f_0$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\theta} f_0(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

**121.** [PLSR] ***a)*** Expliciter le terme général d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence $na_{n+1} = (n+1)a_n$ pour tout $n$.
***b)*** Résoudre $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]-1, 1[$.

**122.** [PLSR] Résoudre $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$ sur $]0, 1[$.

**123.** [P] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $\psi \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^{+*})$ croissante. Soit $y \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ non nulle et vérifiant $y'' + \psi(x)y = 0$. Montrer que les points où $|y|$ admet un extremum local forment une suite finie $(a_1, \ldots, a_n)$ (éventuellement vide) et que la suite des valeurs $(|y(a_1)|, \ldots, |y(a_n)|)$ est décroissante.

**124.** [PLSR] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
***a)*** On suppose que $f'' + f' + f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
***b)*** Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré 1 ou 2 et à racines simples dans $\mathbb{C}$. On pose $\partial_P f = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} a_k f^{(k)}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $P$ pour que, quelle que soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\partial_P f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ implique $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
***c)*** Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})^3, \quad \left\{\begin{array}{l} x' + ax + by + cz \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ y' + bx + cy + az \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ z' + cx + ay + bz \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} x \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ y \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ z \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right. .$$

**125.** [SR] Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ continue. On regarde l'équation $(1) : X'(t) = A(t)\,X(t)$.
***a)*** Décrire l'ensemble des solutions de $(1)$.
***b)*** On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $D : I \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = P^{-1}D(t)\,P$.
Trouver une condition sur $D$ pour que les solutions de (1) aient une limite quand $t \to +\infty$.

**126.** ★★ [P] Soit $n \geqslant 2$. Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue. On considère les solutions de l'équation différentielle $(*) : x'(t) = A(t)x(t)$.
***a)*** On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue et à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans $]-\infty, -1]$ telles que, pour tout $t$, $A(t) = P\,D(t)\,P^{-1}$. Les solutions de $(*)$ ont-elles toutes pour limite 0 en $+\infty$ ?
***b)*** On suppose qu'il existe $P : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients dans $]-\infty, -1]$ telles que, pour tout $t$, $A(t) = P(t)\,D\,P^{-1}(t)$. Les solutions de $(*)$ ont-elles toutes pour limite 0 en $+\infty$ ?

**127.** [PLSR] On fixe un intervalle non trivial $I$.

***a)*** Soient $a$ et $b$ deux fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f$ une solution non nulle sur $I$ de $y'' + ay' + by = 0$. Montrer que les zéros de $f$ sont isolés : pour tout zéro $t_0$ de $f$ il existe un $\delta > 0$ tel que $f$ n'ait pas de zéro dans $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \setminus \{t_0\}$.
***b)*** Soient $p_1, p_2$ deux fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I,\ p_1(t) \geqslant p_2(t)$. Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telles que $f'' + p_1 f = 0$ et $g'' + p_2 g = 0$. Soient $t_1 < t_2$ deux zéros de $f$ entre lesquels $f$ n'admet aucun autre zéro. Montrer qu'il existe un zéro de $g$ dans $[t_1, t_2[$, ainsi que dans $]t_1, t_2]$.
***c)*** Soient $p, q$ deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in [0,1],\ q(t) > 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $f_\lambda$ la solution sur $[0,1]$ de l'équation différentielle $y'' + (p(t) + \lambda q(t))y = 0$ avec la condition initiale $f_\lambda(0) = 0$ et $f'_\lambda(0) = 1$. On note $N_\lambda$ le nombre de zéros de $f_\lambda$. Montrer que $\lambda \mapsto N_\lambda$ est croissante et déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
***d)*** On admet que $(x, \lambda) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mapsto f_\lambda(x)$ est continue. Montrer que l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R},\ f_\lambda(1) = 0\}$ est l'ensemble des termes d'une suite réelle strictement croissante.
***e)*** Montrer que $(\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.

**128.** ★★ [PLSR] Soit $\mu \in \mathbb{R}^+$. On considère $(E_\mu) : y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0$.
***a)*** Résoudre $(E_0)$.
***b)*** Soient $x_0$ et $x_1$ deux fonctions bornées et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et $\omega_1 \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des fonctions $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables par rapport à la seconde variable telles que :
***i)*** $\omega(\mu) \underset{\mu \to 0}{=} 1 + \omega_1 \mu + o(\mu)$ ;
***ii)*** il existe $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que
$\forall k \in \{0,1,2\},\ \forall (\tau, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ |(\partial_2)^k \varepsilon(\tau, \mu)| \leqslant C(\tau)\mu^2$ ;
***iii)*** pour $x : (\tau, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \varepsilon(\tau, \mu)$, la fonction $t \mapsto x(\omega(\mu)t, \mu)$ est solution de $(E_\mu)$ sur $\mathbb{R}^+$ pour $\mu$ voisin de $0$.
Calculer alors $\omega_1$ et donner une expression explicite de $x_0$ et $x_1$ en fonction de quelques constantes inconnues.

**129.** ★★ [L] Soit $A$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $X$ une application de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = A(t)X(t) - X(t)A(t)$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ est semblable à $X(0)$.

**130.** [SR] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{x - y}$ si $x \neq y$ et $f(x,x) = e^x$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**131.** [P] ★★ Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $L \geqslant \ell > 0$ des réels. On suppose qu'en tout point de $\mathbb{R}^d$ la hessienne de $f$ a son spectre inclus dans $[\ell, L]$.
Soit $\tau \in ]0, 2/L[$ ainsi qu'une suite $u$ à termes dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \tau \nabla f(u_n)$. Montrer que $u$ converge.

**132.** [PLSR] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f$ tend vers $+\infty$ en $\infty$, que $\nabla f$ est lipschitzienne et que les points critiques de $f$ sont isolés dans $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe un réel $\tau > 0$ tel que, quel que soit le choix de $a \in \mathbb{R}^d$, la suite définie par $x_0 = a$

et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \tau \nabla f(x_n)$ soit convergente. On commencera par le cas où $d = 1$ et $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$.

**133.** [L] Soit $G$ un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On pose $L = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} \in G\}$.
***a)*** Montrer que $L$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Ind.* Considérer $\left(e^{tA/k}e^{tB/k}\right)^k$.
***b)*** Montrer que $\forall (A,B) \in L^2,\ AB - BA \in L$.
***c)*** Que peut-on dire de $L$ pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ?

**134.** [PLSR] Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une application $f$ de classe $C^2$ définie sur un ouvert $O$ de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si, pour tout $x \in O$, $df_x$ est composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.
***a)*** On suppose que $n = 2$ et que $f$ vérifie $\mathcal{P}$. On note $f = (f_1, f_2)$. Montrer que $f_1$ et $f_2$ sont harmoniques, c'est-à-dire que $\Delta f_1 = 0$ et $\Delta f_2 = 0$.
***b)*** Montrer que le résultat de la question ***a)*** est faux si $n \geqslant 3$. On pourra considérer l'application $f :\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

**135.** [P] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
On dit que $f$ est harmonique si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On dit que $f$ est homogène de degré $\lambda \geqslant 0$ si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$.
Soit $\lambda \geqslant 0$. Déterminer les fonctions harmoniques et homogènes de degré $\lambda$.

***Géométrie***

**136.** [L] Montrer qu'il n'existe aucun triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont dans $\mathbb{N}^*$ et dont l'aire est un carré parfait non nul.

**137.** ★★ [P] Soient $a, b, c, d$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Quelle est l'aire maximale d'un quadrilatère dont les côtés successifs ont pour longueurs $a, b, c, d$ ?

**138.** [PLSR] ***a)*** Quelle est l'aire maximale possible pour un rectangle de périmètre $1$ ?
***b)*** On considère un entier $n \geqslant 3$ et une liste strictement croissante $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ à termes dans $[0, 2\pi]$. Déterminer la valeur maximale possible pour le périmètre du polygone de sommets $e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}$ (dans cet ordre).
***c)*** Soit $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes. On convient que $z_0 = z_n$. On définit l'aire algébrique du polygone $z_1 \cdots z_n$ comme $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{Re}(z_k)\,\mathrm{Im}(z_{k+1}) - \mathrm{Im}(z_k)\,\mathrm{Re}(z_{k+1}))$. On fixe un réel $p > 0$. Parmi les listes $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ telles que le périmètre de $z_1 \cdots z_n$ soit égal à $p$, déterminer celles qui maximisent l'aire algébrique du polygone associé.

***Probabilités***

**139.** [PLSR] ***a)*** Calculer la variance d'une variable de Poisson.
***b)*** Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $p$ un nombre premier. Calculer $\mathbf{E}\left(X^p \text{ modulo } p\right)$ où $X \sim \mathcal{P}(a)$.

**140.** [SR] Soient $p \in [0,1]$ et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi Bernoulli de paramètre $p$. On pose $S_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 0$, $S_{n+1} = \begin{cases} 3S_n + 1 & \text{si } X_n = 1 \\ \dfrac{S_n}{2} & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$.
***a)*** Étudier les cas $p = 0$ et $p = 1$. On supposera que $0 < p < 1$ dans toute la suite de l'exercice.
***b)*** Donner une formule de récurrence vérifiée par la suite $(\mathbf{E}(S_n))_{n\geqslant 0}$, et étudier son comportement quand $n \to +\infty$.
***c)*** Montrer que $\mathbf{P}\left((S_n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\right) = 0$.

**141.** [SR] Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}(X_1^4) < +\infty$. On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(X_1)$.

**142.** [L] Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ (resp. $(Y_n)_{n\geqslant 1}$) une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $T = \inf\{n \geqslant 2 \ ; \ X_n \notin \{X_1, \ldots, X_{n-1}\}\}$ et $S = \inf\{n \geqslant 2 \ ; \ Y_n \notin \{Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}\}$. On suppose que $T \sim S$. Que peut-on dire du lien entre les suites $(X_n)$ et $(Y_n)$ ?

**143.** [P] Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\beta > 1$. Soit $(Y_p)_{p\in\mathcal{P}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbf{P}(Y_p = k) = (1 - p^{-\beta})p^{-k\beta}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathcal{P}$. On pose $Z = \displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} Y_p \ln p$ et $X = \exp Z$.
***a)*** Donner la loi de $X$.
***b)*** En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^\beta} = \frac{1}{\zeta(\beta)}$ où $\mu$ est la fonction de Möbius.

**144.** ★ [L] Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \{\pm 1\}^{n^2}$, il existe $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans $\{\pm 1\}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_iy_j \geqslant Cn^{3/2}$.

**145.** Soient $\theta \in ]0,1[$ et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathbf{P}(X > 0) > 0$. Montrer que $\mathbf{P}\left(X \geqslant \theta\, \mathbf{E}(X)\right) \geqslant \dfrac{(1-\theta)^2\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

**146.** ★ [P] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soit $E_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble de cardinal $n$. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$.
Si $i, j \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_i \star e_j = e_{\sigma_i(j)}$. Montrer que la probabilité que $(E, \star)$ soit un groupe, sachant que $\star$ admet un neutre, tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

**147.** ★★ [L] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_n = e_i) = \mathbf{P}(X_n = -e_i) = \dfrac{1}{2d}$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_0 = 0$. Soit $T = \inf\{n > 0, S_n = 0\}$ et $p_d = \mathbf{P}(T < +\infty)$. On admet que $p_d < 1$ pour $d \geqslant 3$. Montrer que $p_d \to 0$ lorsque $d \to +\infty$.

**148.** [P] Soient $p \in \,]0, 1/2[$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telle que $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_n = -1) = p$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer l'existence de $c, C_1, C_2 > 0$ tels que $\forall u \geqslant 0,\ C_1 e^{-cu} \leqslant \mathbf{P}\left(\sup\limits_{n\geqslant 1} S_n \geqslant u\right) \leqslant C_2 e^{-cu}$.

**149.** [PLSR] ***a)*** Soit $X$ une variable aléatoire réelle et $s > 0$ tel que $\mathbf{E}(e^{sX})$ soit finie.
Démontrer que $\forall a > 0,\ \mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant e^{-sa}\mathbf{E}(e^{sX})$.
***b)*** Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variable aléatoires i.i.d. à valeurs dans $[0, 1]$.
On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Démontrer que $\forall t > 0,\ \mathbf{P}(|S_n - \mathbf{E}(S_n)| \geqslant t) \leqslant 2e^{-t^2/(2n)}$.

**150.** [PLSR] Soit $(E, \mathcal{P}(E))$ un espace probabilisable avec $E$ dénombrable.
***a)*** Rappeler la définition d'une probabilité sur cet espace.
***b)*** Pour $A$ et $B$ probabilités sur cet espace, on pose $d(A, B) = \max\limits_{S\subset E} A(S) - B(S)$.
Montrer que $d(A, B) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{x\in E} |A(\{x\}) - B(\{x\})|$.
***c)*** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E$ de lois respectives $A$ et $B$. Montrer que $\mathbf{P}(X \neq Y) \geqslant d(A, B)$.
***d)*** Les deux lois $A$ et $B$ étant fixées, montrer qu'on peut construire $X$ et $Y$ de façon à assurer l'égalité dans l'inégalité précédente.

**151.** [PLSR] Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On pose $p_k = \mathbf{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbf{P}(Y = k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et $d(p, q) = \max\limits_{S\subset[\![0,n]\!]} \mathbf{P}(X \in S) - \mathbf{P}(Y \in S)$.
***a)*** Montrer que $d(p, q) \geqslant 0$. Que dire si $d(p, q) = 0$ ?
***b)*** Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Comparer $\mathbf{E}(\varphi(X))$ et $\varphi(\mathbf{E}(X))$.
***c)*** On suppose de plus qu'il existe au moins deux éléments $k$ de $[\![0, n]\!]$ tels que $p_k > 0$. On suppose de plus que $\varphi$ strictement convexe, c'est-à-dire telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \,]0, 1[\,,\ x \neq y \Rightarrow \varphi((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)\varphi(x)+t\varphi(y)$. Montrer que $\mathbf{E}(\varphi(X)) > \varphi(\mathbf{E}(X))$.
***d)*** On suppose que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $p_k > 0$ et $q_k > 0$. On pose $H(p, q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \ln\left(\frac{p_k}{q_k}\right)$.
Montrer que $H(p, q) \geqslant 0$. Que dire si $H(p, q) = 0$ ?

**152.** [L] On considère $r_0 = 0$ et $(r_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \,]0, 1[^{\mathbb{N}^*}$.
Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose $p_{i,j} = r_i$ si $j = i + 1$, $1 - r_i$ si $j = i - 1$ et 0 sinon.

On admet l'existence d'une famille de variables aléatoires $(X_k^i)_{(i,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ telles que
***i)*** $X_0^{i_0} = i_0$ p.s. pour tout $i_0 \in \mathbb{N}^*$,
***ii)*** $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k^{i_k} = i_{k-1})\right) = \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1},i_k}$ pour tout $(i_0,\ldots,i_k) \in {\mathbb{N}^*}^{k+1}$.
On pose, pour $i,j \in \mathbb{N}^*$, $\tau_j^i = \inf\{k \in [\![0,+\infty[\![,\ X_k^i = j\} \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.
Soit $b \in \mathbb{N}$. Calculer, pour $i \in [\![0,b]\!]$, $\hat{p}_i = \mathbf{P}(\tau_0^i < \tau_b^i)$ en fonction des $\gamma_k = \prod_{i=1}^{k}\dfrac{1-r_i}{r_i}$.

**153.** [PLSR] Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes et $X_0 = k \in \mathbb{Z}$ (constante). On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_0 + \cdots + X_n$.
***a)*** Déterminer l'espérance et la variance de $S_n$.
***b)*** Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $k_1,\ldots,k_m \in \mathbb{Z}$. Que dire de la loi de $(S_n)_{n\geqslant m}$ conditionnée par $(S_1 = k_1,\ldots,S_m = k_m)$ ?
***c)*** Soient $k, N \in \mathbb{N}^*$ avec $N \geqslant k$. On considère que la marche aléatoire s'arrête dès que $S_n = 0$ ou $S_n = N$. On admet que l'arrêt est presque sûr. Déterminer la probabilité $p_k$ que la marche s'arrête sur 0 en partant de $k$.
***d)*** Déterminer le temps moyen d'arrêt (en 0 ou $N$ cette fois) en partant de $k$.

**154.** $\star\star$ [P] On considère $n$ variables aléatoires de Rademacher indépendantes $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Montrer que, pour tout réel $p > 0$, il existe $(c_p, C_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $(z_1,\ldots z_n) \in \mathbb{C}^n$, $c_p\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i z_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

**155.** $\star$ [L] Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\quad \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X_n = -k) = ce^{-|k|}$ où $c$ est à déterminer. Déterminer la loi du rayon de convergence de la série entière aléatoire $\sum X_n z^n$.

**156.** [P] Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $G_n$ le graphe aléatoire $G_{n,p_n}$ d'Erdös-Renyi, c'est-à-dire un graphe aléatoire de sommets $[\![1,n]\!]$ et une famille $(X_{\{i,j\}})_{\{i,j\}\in\mathcal{P}_2([\![1,n]\!])}$ de variables de Bernoulli i.i.d. de paramètre $p_n$, avec $X_{\{i,j\}} = 1$ si et seulement s'il existe une arête reliant $i$ et $j$. On note $I_n$ le nombre de sommets isolés de $G_n$.
***a)*** Soit $\varepsilon \in\ ]0,1[$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geqslant (1+\varepsilon)\dfrac{\ln(n)}{n}$. Montrer que $\mathbf{P}(I_n \geqslant 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
***b)*** Soit $\varepsilon \in\ ]0,1[$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant (1-\varepsilon)\dfrac{\ln(n)}{n}$. Montrer que $\mathbf{P}(I_n \geqslant 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

**157.** ★★ [L] Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ vérifiant la condition suivante : quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelle que soit $S$ partie non vide de $\mathbb{U}_n$, il existe un entier naturel $p \leqslant \dfrac{cn}{|S|}$ ainsi qu'une $p$-liste $(z_1, \dots, z_p)$ d'éléments de $\mathbb{U}_n$ telle que $\left|\displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} z_k S\right| \geqslant \dfrac{n}{2}$.

**158.** [PLSR] Soit $p \in [0, 1/2]$. On fixe une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ et telles que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = 0) = 1 - 2p$. Pour $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(b, a, n) = \mathbf{P}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X_k = b\right)$.

***a)*** On suppose $a = (2^{k-1})_{k \in \mathbb{N}^*}$. Calculer $P(0, a, n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

***b)*** On suppose $p = \dfrac{1}{4}$ et $a = (1)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Calculer $P(0, a, n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

***c)*** Déterminer les valeurs de $p$ pour lesquelles $b \mapsto P(b, a, n)$ est maximale en 0 pour tout $a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$.

**159.** [PLSR] Soit $n \geqslant 3$. Une alpiniste dispose de $n$ lieux possibles pour planter sa tente, lieux numérotés de 1 à $n$. Elle peut visiter chacun de ces lieux successivement, à partir du numéro 1, et doit décider si elle y plante sa tente. Lorsqu'elle visite le lieu $k$, elle peut savoir si elle préfère ce lieu à tous les lieux précédemment visités, mais ne sait pas si elle le préfère aux lieux non encore visités. Une fois un lieu visité, si l'alpiniste a refusé d'y installer sa tente elle ne pourra plus revenir sur ce lieu. L'alpiniste a pour objectif de maximiser la probabilité d'avoir choisi celui des $n$ lieux qui a sa préférence parmi les $n$ lieux.

***a)*** Déterminer une stratégie optimale pour l'alpiniste lorsque $n = 3$.

***b)*** On fixe un $k \in [\![0, n-1]\!]$. L'alpiniste suit la stratégie décrite ci-après : elle visite automatiquement les $k+1$ premiers lieux ; étant donné $\ell \in [\![k+1, n-1]\!]$, si l'alpiniste visite le $\ell$-ième lieu alors elle l'écarte si et seulement s'il n'a pas sa préférence parmi tous les lieux déjà visités. Déterminer la probabilité $p_{n,k}$ pour que l'alpiniste s'installe sur le lieu ayant sa préférence parmi les $n$ lieux.

***c)*** On fixe un $k_n$ maximisant $p_{n,k}$ lorsque $k$ parcourt $[\![0, n-1]\!]$. Étudier le comportement asymptotique de $k_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**160.** [L] Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles discrètes. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $f_n(t) = \dfrac{1}{n}\left|\{k \in [\![1, n]\!],\ X_k \leqslant t\}\right|$. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{P}\left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout réel $\varepsilon > 0$.

**161.** [L] Pour deux variables aléatoires réelles bornées $X$ et $Y$, sur des espaces probabilisés *a priori* distincts, on note $X \preccurlyeq_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On se donne, sur un espace probabilisé, deux suites $(M, X_1, X_2, \dots)$ et $(N, Y_1, Y_2, \dots)$ de variables aléatoires indépendantes bornées vérifiant les conditions suivantes :

***i)*** les $X_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, sont identiquement distribuées et positives ;

***ii)*** les $Y_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, sont identiquement distribuées et positives ;
***iii)*** $M$ et $N$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ ;
***iv)*** $M \preccurlyeq_c N$ et $X_1 \preccurlyeq_c Y_1$.
On pose $S = \sum_{k=1}^{M} X_k$ et $T = \sum_{k=1}^{N} Y_k$. Montrer que $S \preccurlyeq_c T$.

**162.** ★★ [L] Soient $E$ une partie bornée et au plus dénombrable de $\mathbb{R}^+$, et $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux lois de probabilité sur $E$. Déterminer, en fonction de ces lois, la plus petite constante $K_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ telle que, pour tout couple $(X, Y)$ de variables aléatoires réelles à valeurs dans $E$ telles que $X \sim \mathcal{L}$ et $Y \sim \mathcal{L}'$, on ait l'inégalité $\mathbf{E}(XY) \leqslant K_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$.

**163.** ★ [SR] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbf{E}\left(\|X\|^2\right) < +\infty$. On note $C(X) = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de covariance.
***a)*** Que dire de $C(X)$ si les $X_i$ sont indépendantes ?
***b)*** Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $Y = \langle v, X\rangle$. Exprimer $\mathbf{V}(Y)$ en fonction de $C(X)$.
***c)*** On suppose les $X_i$ centrées. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Z = AX$. Exprimer $\mathbf{E}(\|Z\|^2)$ en fonction de $C(X)$.
***d)*** Caractériser les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un vecteur aléatoire $X$ tel que $A = C(X)$.
***e)*** Soit $H$ un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $\mathbf{P}(X \in H) = 1$ si et seulement si $H^\perp \subset \mathrm{Ker}\,(C(X))$.

**164.** [SR] Soit $\alpha > 0$. On considère l'équation différentielle $(*)$ : $\left(y' = -x,\ x' = \alpha^2 y\right)$ avec $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
***a)*** Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est fixé, justifier l'existence et l'unicité d'une solution de $(*)$ vérifiant $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Pour cette solution, on pose $I(t) = y^2(t)$ et $J(t) = \alpha^2 x^2(t)$.
***b)*** Montrer que les applications $T \mapsto \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$ et $T \mapsto \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T J(t)\,\mathrm{d}t$ admettent une limite finie en $+\infty$.
***c)*** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires $x_0, y_0$ indépendantes à valeurs dans $\dfrac{1}{N}\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}\left(x_0 = \dfrac{k}{N}\right) = \mathbf{P}\left(y_0 = \dfrac{k}{N}\right) = \gamma_N \exp\left(-(k/N)^2\right)$.
***i)*** Justifier l'existence de $\gamma_N \in \mathbb{R}^+$ pour lequel ces conditions définissent la loi des deux variables aléatoires.
***ii)*** On fixe $t$ et on considère, pour $N \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $f_N(t) = I(t) + J(t)$ (les fonctions $I$ et $J$ sont associées aux variables aléatoires $x_0$ et $y_0$). Montrer que $\mathbf{E}\left(e^{-f_N(t)}\right)$ possède une limite quand $N \to +\infty$.