

Centrale I – MP - MPI

Algèbre

1173. a) Donner la définition de la signature et calculer celle de la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ , et $\nu(\sigma)$ le nombre de ses points fixes.

i) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer χ_A sous forme factorisée.

ii) En déduire la valeur de la somme $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{1 + \nu(\sigma)}$.

1174. Soit G un groupe fini d'ordre n . On appelle caractère de G tout morphisme de groupes χ de G vers \mathbb{C}^* . On note \widehat{G} le groupe des caractères de G .

a) Montrer que \widehat{G} est un groupe multiplicatif, et que les éléments de \widehat{G} sont à valeurs dans \mathbb{U}_n .

b) Dans cette question, on suppose G cyclique.

Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et que \widehat{G} est isomorphe à G .

c) Dans cette question, on suppose G abélien. Montrer que, si H est un sous-groupe de G et $\xi \in \widehat{H}$, il existe $\chi \in \widehat{G}$ tel que $\chi|_H = \xi$.

1175. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \prod_{\substack{\xi \in \mathbb{U}_n \\ \omega(\xi)=n}} (X - \xi)$, où $\omega(\xi)$ est l'ordre de la racine n -ième ξ

comme élément du groupe \mathbb{C}^* .

a) Montrer que $\omega(\xi)$ divise n pour tout $\xi \in \mathbb{U}_n$.

b) Exprimer $(X - 1)F_n$ et F_n dans le cas où n est premier.

c) Soient $A, B \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $AB \in \mathbb{Z}[X]$ et $A \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire.

Montrer que $B \in \mathbb{Z}[X]$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n \in \mathbb{Z}[X]$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $F_n(1)$.

1176. a) Écrire et démontrer l'inégalité de Jensen puis en déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note H l'intersection des convexes de \mathbb{C} contenant les racines de P .

b) Montrer que H est convexe et compact.

c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus H$.

i) Montrer qu'il existe un unique $q \in H$ tel que $d(z, H) = d(z, q)$.

ii) Montrer qu'il existe $\psi \in [0, \pi/2[$ tel que $\forall h \in H, \left| \operatorname{Arg} \left(\frac{z-h}{z-q} \right) \right| \leq \psi$ (argument dans $]-\pi, \pi]$).

1177. Soit A et B deux polynômes à coefficients complexes.

a) Montrer que $\deg(A + B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$, et donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Dans la suite, on suppose que A et B n'ont pas de racine commune, et on pose $C = A+B$. On suppose enfin qu'aucun des polynômes A, B, C n'est constant. On pose $W = A'B - AB'$.

b) Soit z une racine de multiplicité m de ABC . Montrer que z est de multiplicité $m - 1$ comme racine de W .

c) On note μ le nombre de racines distinctes de ABC .

Montrer que $\mu \geq \deg(A) + \deg(B) + \deg(C) - \deg(W)$.

d) En déduire que $\mu > \max(\deg A, \deg B, \deg C)$.

1178. a) Rappeler la définition d'un polynôme irréductible sur un corps \mathbb{K} et l'énoncé du théorème de d'Alembert-Gauss.

- b)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Montrer que toute racine réelle de P est de multiplicité paire et que le coefficient dominant de P est positif. En déduire qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.
- c)** Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $\forall x \in [-1, 1], Q(x) \geq 0$.
- i)** Montrer que si $\deg(Q) \leq 2$ alors il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et $\lambda \in [-1, 1]$ tels que $Q = a(X - \lambda)^2 + b(1 - X^2)$.
- ii)** Montrer plus généralement qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $Q = A^2 + (1 - X^2)B^2$.

1179. Dans ce qui suit, \mathbb{K} désigne un corps.

- a)** Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
- b)** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que a soit racine simple de P .
- c)** Pour $n \geq 2$, on pose $P_n = X^n - X + (-1)^n$. Déterminer le nombre des racines de P dans \mathbb{Q} , dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} .
- d)** On note a_1, \dots, a_n les racines complexes de P_n .

Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 + a_n \end{vmatrix}.$$

- 1180. a)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \operatorname{Com}(A)^T = \det(A)I_n$.
- b)** On définit $\operatorname{GL}_n(\mathbb{Z})$ comme l'ensemble des matrices de $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers, dont l'inverse est également à coefficients entiers. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.
- c)** Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible sur \mathbb{Q} . Montrer que les racines complexes de P sont simples.

1181. On note S_n le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n . On se donne une base (e_1, \dots, e_n) de E .

- a) i)** Soit G un groupe fini. Que vaut $x^{|G|}$ pour $x \in G$? Le démontrer dans le cas abélien.
- ii)** Pour $\sigma \in S_n$, on définit l'endomorphisme f_σ par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Montrer que $\sigma \mapsto f_\sigma$ est un morphisme de groupes de S_n dans $\operatorname{GL}(E)$.
- b)** Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que f_σ est diagonalisable. Déterminer ses éléments propres.
- c)** On dit qu'un sous-espace de E est stable par permutation si tous les f_σ le stabilisent. Déterminer les sous-espaces stables par permutation.

1182. a) Soit \mathcal{A} un ensemble fini de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent entre elles. Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à toutes les matrices de \mathcal{A} .

- b)** Montrer que, si $p \neq n$, les groupes $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\operatorname{GL}_p(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.

1183. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- a)** Montrer que $\mathbb{K}[u]$ est de dimension finie et que $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u$.

- b)* Montrer que si u est inversible alors $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
c) Montrer que $\exp(u) \in \mathbb{K}[u]$.
d) On prend $E = \mathbb{K}[X]$ et D l'opérateur de dérivation. Montrer que $u = \text{id} - D$ est inversible. A-t-on $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$?

1184. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M .

- a)* Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, M et $P(M)$ commutent.
b) On pose $P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$. Montrer que $P'(M) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
c) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.
i) Montrer que A et B possèdent un vecteur propre commun.
ii) Montrer qu'il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que les matrices $Q^{-1}AQ$ et $Q^{-1}BQ$ soient triangulaires supérieures.
d) On considère la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ définie par $M_0 = M$ et $M_{k+1} = M_k - P(M_k)P'(M_k)^{-1}$ pour tout $k \geq 0$. Montrer que la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ est bien définie et étudier sa convergence.

1185. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- a)* Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A a un polynôme annulateur scindé à racines simples.
b) Soient A, B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et qui commutent. Montrer que $A + \lambda B$ est diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
c) Soit $n \geq 3$. Mettre en évidence deux matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne commutent pas et telles que $A + \lambda B$ soit diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
d) Soient A, B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A + \lambda B$ soit diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que A et B commutent.

1186. Soit Y une colonne de \mathbb{C}^{n-1} non nulle, $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha = Y^T Y \in \mathbb{C}$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y^T & z \end{pmatrix}$.

- a)* Montrer que χ_A s'écrit $X^{n-2}(X - \lambda)(X - \mu)$. Calculer $\lambda + \mu$ et $\lambda^2 + \mu^2$ et en déduire χ_A en fonction de α, z et n .
b) Discuter du rang de A^2 . Déterminer le polynôme minimal de A selon que α est nul ou non.

1187. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On désigne par Φ l'application qui à

$P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ associe la reste de la division euclidienne de PF par $X^n - 1$.

- a)* Rappeler la définition de la division euclidienne de deux polynômes. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_{n-1}[X])$.
b) i) Donner la matrice de Φ dans la base canonique.
ii) Déterminer les éléments propres de Φ . L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

1188. Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

- a)* Montrer que les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u .

b) Exprimer les coefficients des termes en X^{n-1} et X^{n-2} de χ_u en fonction de $\text{tr}(u)$ et $\text{tr}(u^2)$.

c) On suppose u de rang 2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{tr}(u)$ et $\text{tr}(u^2)$ pour que u soit diagonalisable.

1189. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$.

a) Justifier que $\rho(A)$ est bien défini. Montrer que les valeurs propres de A sont les racines de χ_A .

b) On pose $P_A(X) = X^n \chi_A \left(\frac{1}{X} \right)$. Calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'_A}{P_A}$.

c) On suppose que $\rho(A) \leq 1$ et que $1 \notin \text{Sp}(A)$. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{tr}(A^k)}{k}$ est bien défini et

$$\text{que } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{tr}(A^k)}{k} = - \int_0^1 \frac{P'_A(t)}{P_A(t)} dt.$$

1190. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{0 \leq i, j \leq n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note E le \mathbb{R} -espace

vectorel des $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continues et intégrables. On pose $K_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

a) Énoncer et démontrer le critère d'injectivité d'une application linéaire.

b) Pour $f \in E$, on pose $T_n(f) : x \in [0, 1[\mapsto \int_0^1 K_n(xt) f(t) dt$.

i) Montrer que T_n est un endomorphisme de E .

ii) Montrer que 0 est valeur propre de T_n .

iii) Comparer les valeurs propres de T_n et de H_n .

1191. ★★ Soient E un espace euclidien et une partie finie \mathcal{R} de $E \setminus \{0\}$ telle que :

– \mathcal{R} engendre E ,

– pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, \mathcal{R} est stable par la réflexion s_α par rapport à l'hyperplan de vecteur normal α ,

– pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, les seuls vecteurs colinéaires à α dans \mathcal{R} sont α et $-\alpha$,

– pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^2$, $n_{\alpha, \beta} = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$.

a) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^2$.

i) Donner la définition de la réflexion s_α ainsi que son expression analytique.

ii) Calculer $n_{\alpha, \beta} n_{\beta, \alpha}$ en fonction de $\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$.

iii) On suppose α, β non colinéaires et tels que $n_{\alpha, \beta} > 0$. Montrer que $n_{\alpha, \beta} = 1$ ou $n_{\beta, \alpha} = 1$.

b) On munit E d'un ordre total \leq qui respecte :

– $\forall (x, y, z) \in E^3, x \leq y \implies x + z \leq y + z$,

– $\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}^+, x \leq y \implies \lambda x \leq \lambda y$.

On note \mathcal{R}^+ l'ensemble des éléments de \mathcal{R} plus grands que 0_E au sens de \leq . On note \mathcal{B} l'ensemble des éléments de \mathcal{R}^+ ne s'écrivant pas comme somme de deux éléments de \mathcal{R}^+ .

i) Soit $x \in \mathcal{R}^+$. Montrer que x s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{B} à coefficients entiers positifs.

ii) Montrer que \mathcal{B} est une base de E .

1192. ★ Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

a) i) Donner la définition d'un endomorphisme autoadjoint.

Soient B une base orthonormale de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans la base B est symétrique.

i) Soient B une base orthonormale de E et $f \in \mathcal{S}^+(E)$.

On note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la matrice de f dans la base B . Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrer que, si $m_{i,i} = 0$, alors les ligne i et colonne i de la matrice M sont nulles.

Ind. Considérer l'application $t \mapsto \langle f(e_j + te_i), e_j + te_i \rangle$.

b) Soient $f \in \mathcal{S}^+(E)$ et $g \in \mathcal{S}(E)$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, \det(f - tg) = 0$.

i) Montrer que $\text{Ker}(g) \neq \{0\}$.

ii) Montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \neq \{0\}$.

1193. On pose, pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} \left(\frac{|a_{i,j}| + |a_{j,i}|}{2} \right)$.

a) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b) L'application N est-elle une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

c) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Montrer que $|\lambda| \leq nN(A)$.

1194. L'espace \mathbb{R}^n est muni de sa structure euclidienne canonique.

a) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et telle que $\int_a^b f = 0$. Montrer que f est nulle.

b) Montrer que la matrice $M_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique définie positive. Indication :

$$\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt.$$

c) On note λ_{\min} (resp. λ_{\max}) la plus petite (resp. grande) valeur propre de M_n . Montrer que $\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq x^T M_n x \leq \lambda_{\max} \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

d) On note F le sous-espace propre de M_n associé à λ_{\max} . Montrer que, si $x \in F$, toutes les coordonnées de x sont de même signe.

e) Déterminer $\dim F$.

1195. a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Justifier que A possède au moins une valeur propre réelle.

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit (x_1, \dots, x_k) une famille libre formée de vecteurs propres de A tels que les valeurs propres associées μ_1, \dots, μ_k soient en ordre croissant.

On note $S = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$. Montrer que

$$\mu_1 = \min_{x \in S, \|x\|=1} x^T A x = \min_{x \in S \setminus \{0\}} \frac{x^T A x}{x^T x} \text{ et } \mu_k = \max_{x \in S, \|x\|=1} x^T A x = \max_{x \in S \setminus \{0\}} \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

c) Soient A, B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ les valeurs propres de A (en tenant compte des multiplicités), et de même pour B et $A + B$.

Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n - i \rrbracket, \lambda_i(A + B) \leq \lambda_{i+j}(A) + \lambda_{n-j}(B)$.

Analyse

1196. ★ a) Montrer que $E = \ell^1(\mathbb{N})$, espace des suites réelles sommables, est un espace vectoriel normé pour $u \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

b) On munit E de la relation d'ordre partielle $u \preceq v \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. Soit (u_k) une suite d'éléments de E croissante et majorée par $v \in E$. Montrer que (u_k) converge dans E .

c) Soient u, v deux éléments de E tels que $u \preceq v$. Montrer que l'ensemble des éléments w de E tels que $u \preceq w \preceq v$ est compact.

d) Donner un exemple de partie compacte K de E telle qu'il n'existe pas de suite $u \in E$ vérifiant $\forall x \in K, |x| \preceq u$.

1197. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, C un convexe compact d'intérieur non vide de E , symétrique par rapport à 0.

Pour $x \in E$, on pose $j_C(x) = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{x}{\lambda} \in C \right\}$, en convenant que $\inf \emptyset = +\infty$.

a) i) Rappeler la définition d'une norme.

ii) Montrer que j_C est à valeurs réelles, positive et homogène.

iii) Montrer que $j_C(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

b) i) Montrer que $x \in C$ si et seulement si $j_C(x) \in [0, 1]$.

ii) Montrer que, pour tous $x, y \in E, j_C(x + y) \leq j_C(x) + j_C(y)$.

Ind. Pour $\varepsilon > 0$, poser $x' = \frac{x}{j_C(x) + \varepsilon}, y' = \frac{y}{j_C(y) + \varepsilon}$ et $t = \frac{j_C(x) + \varepsilon}{j_C(x) + j_C(y) + 2\varepsilon}$.

c) On munit E d'une norme. Montrer l'existence de $f : E \rightarrow E$, continue, bijective, et telle que $f(C) = B(0, 1)$ et $f(C \setminus \overset{\circ}{C}) = S(0, 1)$.

1198. a) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel normé E . Montrer que la continuité de u est équivalente à son caractère lipschitzien, et aussi à sa continuité en 0.

b) On munit $\ell^2(\mathbb{Z})$, espace vectoriel des familles de réels de carré sommable indexées par \mathbb{Z} (on admet qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$), de $(u, v) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n v_n$, dont on

admet qu'il s'agit d'un produit scalaire, et on munit $\ell^2(\mathbb{Z})$ de la norme associée. On pose $T : u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mapsto (2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Montrer que T est un endomorphisme continu de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

c) Montrer que T est injectif mais non surjectif.

d) Montrer que $T + \text{id}$ est surjectif.

1199. ★ a) i) Montrer que l'image d'une partie connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs.

ii) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective sur un intervalle I de \mathbb{R} . Montrer que f est strictement monotone.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice $f(A) = (f(a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible.

- b)** Montrer que f est strictement monotone et ne s'annule pas sur \mathbb{R}^* .
c) On suppose f croissante et surjective. Caractériser f .

1200. a) Rappeler la définition de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et montrer que c'est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

c) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne de \mathbb{R}^n . On note \mathcal{B} la boule unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

i) Montrer que \mathcal{B} est convexe.

ii) Trouver les points extrémaux de \mathcal{B} , c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{B}$ telles que $\mathcal{B} \setminus \{A\}$ est convexe.

1201. Soit $E_n = \mathcal{C}^n([-1, 1], \mathbb{C})$. Si $f \in E_n$, on pose $\pi_n(f) = \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \|f^{(k)}\|_\infty$.

a) Montrer que π_n est une norme sur E_n , puis calculer $\pi_n(x \mapsto x^n)$.

b) Si $f \in E_n$, on pose $A_n(f) : x \in [-1, 1] \mapsto x f(x)$. Montrer que A_n est un endomorphisme de E_n , continu pour π_n , et de norme subordonnée $n + 1$.

c) On suppose $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in E_n$, on pose $B_n(f) : x \in [-1, 1] \mapsto \int_0^1 f'(xt) dt$. Montrer que B_n est une application linéaire de E_n dans E_{n-1} . Montrer que B_n est continue pour les normes π_n et π_{n-1} , et de norme subordonnée 1.

1202. a) Énoncer les théorèmes de sommation des relations de comparaison pour les séries numériques.

b) Montrer que $\sum_{k=1}^n \ln(k) = n \ln(n) - n + O(\ln(n))$.

c) Soient $(a_k)_{k \geq 2}$ une suite réelle et $b : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On pose $A(t) = \sum_{k=2}^{\lfloor t \rfloor} a_k$

pour $t \geq 2$. Montrer que $\sum_{k=2}^n a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t) dt$ pour tout entier $n \geq 2$.

d) On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers. On pose $R : t > 1 \mapsto \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq t} \frac{\ln p}{p} - \ln(t)$.

Montrer que $\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{1}{p} = 1 + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{R(n)}{\ln n} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln t)^2} dt$ pour tout entier $n \geq 2$.

e) Montrer qu'il existe une constante C telle que $\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq n} \frac{1}{p} = \ln(\ln n) + C + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

1203. a) Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

b) Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ en posant $\|P\| = \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|$ pour tout

$P \in \mathbb{R}[X]$.

c) Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme $T_d \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré d tel que $\cos(d\theta) = 2^{d-1}T_d(\cos \theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

d) Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on note E_d l'ensemble des polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{R}[X]$.

i) Montrer que $\|P\| \geq \frac{1}{2^{d-1}}$ pour tout $P \in E_d$.

ii) Étudier le cas d'égalité.

1204. a) Rappeler la définition de la continuité uniforme pour une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique. Montrer que f est uniformément continue.

c) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, périodique et non constante. Montrer que f admet une plus petite période strictement positive, que l'on notera $P(f)$.

d) Montrer que le résultat de la question précédente peut tomber en défaut si l'on omet l'hypothèse de continuité.

e) Soient f et g continues, périodiques et non constantes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que $f + g$ est périodique si et seulement si $\frac{P(f)}{P(g)} \in \mathbb{Q}$.

1205. Soient $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^2)$ et $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^2 .

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (t, s) \in [0, 1]^2, |t - s| \leq \eta \Rightarrow \|f(s) - f(t) - (s - t)f'(t)\| \leq \varepsilon|s - t|.$$

b) En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} \left\| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\|$ tend vers $\int_0^1 \|f'(t)\| dt$ quand $n \rightarrow +\infty$.

1206. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t} dt$.

a) Montrer que toute fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

b) Justifier l'existence des intégrales puis calculer $I_{n+1} - I_n$, I_n , $J_{n+1} - J_n$ et J_n .

c) Soit $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.

$$\text{Montrer que } \int_0^{\pi/2} f(t) \sin^2(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f(t) dt.$$

1207. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire, ainsi que sa démonstration.

b) Montrer que si ff' a une limite (finie ou infinie) non nulle en $+\infty$, alors f^2 tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

c) On suppose désormais que f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur \mathbb{R} . Montrer que $(f')^2$ l'est aussi.

d) Montrer que $\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2 \right)$.

e) Montrer que f est uniformément continue et tend vers 0 en $\pm\infty$.

1208. Pour une fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel s , on note $Lf(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ lorsque la série converge absolument. On pose $A(f) = \inf\{s \in \mathbb{R}, Lf(s) \text{ défini}\}$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

- a)** Rappeler la définition de la borne inférieure d'une partie de \mathbb{R} .
b) Soit s un réel tel que $s > A(f)$. Montrer que $Lf(s)$ est défini.
c) Soient f et g deux fonctions de \mathbb{N}^* dans \mathbb{C} telles que $A(f) < +\infty$ et $A(g) < +\infty$. On suppose que $\forall s > \max(A(f), A(g)), Lf(s) = Lg(s)$. Montrer que $f = g$.
d) Soient f et g deux fonctions de \mathbb{N}^* dans \mathbb{R} telles que $A(f) < +\infty$ et $A(g) < +\infty$. On pose $h(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$. Montrer que $\forall s > \max(A(f), A(g)), Lh(s) = Lf(s)Lg(s)$.

1209. On note $L^2(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , de carré intégrable.

- a)** Montrer que $(f, g) \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} fg$ est un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^+)$.
b) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
c) Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f$ est prolongeable en une fonction continue ψ sur \mathbb{R}^+ .
d) Montrer que $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+)$ et $\int_0^{+\infty} \psi^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} \varphi^2$.

1210. a) Énoncer les théorèmes de changement de variable et d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.

- b)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(P(t)) dt$ converge.
c) Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ n'est pas absolument convergente.

1211. a) Caractériser la convexité pour les fonctions dérivables sur un intervalle.

- b)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin((2n+1)\theta) = (\sin \theta)P_n(\sin^2 \theta)$.

c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x) = (2n+1) \sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2(\pi x/(2n+1))}{\sin^2(k\pi/(2n+1))}\right)$.

- d)** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$. Étudier la limite simple de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

1212. Pour tous $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $K_n(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx}$.

- a)** Soient $q \in \mathbb{C}$ et $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq n$. Calculer la somme $\sum_{k=m}^n q^k$.

b) Pour tous $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, montrer que $K_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=-j}^j e^{ikx} = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$.

c) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodique. On pose, pour $k \in \mathbb{Z}$, $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$. Pour

$n \in \mathbb{N}$, soit $S_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$.

i) Montrer que $f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) K_n(x-t) dt$ pour tous $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

ii) Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

1213. Pour $n \geq 1$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$. On pose $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

a) Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} . La convergence de $\sum f_n$ est-elle uniforme sur \mathbb{R}^+ ?

b) Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

c) Trouver un équivalent de f' en $+\infty$.

1214. ★★ Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{x}{n}\right)$.

On suppose que S a une limite réelle ℓ en $+\infty$. On souhaite montrer que la suite (a_n) est nulle.

a) i) Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange à un ordre quelconque.

ii) Montrer que S est bien définie sur \mathbb{R} .

b) On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge absolument et que $\ell = 0$.

i) Montrer que S est continue.

ii) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $I : T \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T S(x) \cos\left(\frac{x}{m}\right) dx$.

Montrer que $\lim_{T \rightarrow +\infty} I(T) = 0$.

iii) Montrer que $a_m = 0$.

c) Traiter le cas général.

1215. On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} : x \mapsto \int_0^x t f_n(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Énoncer le théorème d'intégration terme à terme.

b) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) puis de la série $\sum f_n$:

i) dans le cas où f est constante,

ii) dans le cas général.

c) Soit $T : f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Montrer que T définit un automorphisme de l'espace vectoriel E .

1216. a) Démontrer le théorème d'inversion série-intégrale sous convergence uniforme sur un segment

b) Soit $I : x \mapsto \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sqrt{x}\sin(t)} dt$. Montrer que I est développable en série entière sur \mathbb{R}^+ .

c) Donner un équivalent en $+\infty$ de $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

1217. a) Énoncer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

c) Soit $L : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-t^2} dt$. Montrer que la fonction L est développable en série entière au voisinage de 0. Préciser la validité et les coefficients de ce développement. On admettra que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$.

1218. Soit (a_n) une suite réelle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

a) Donner la définition du produit de Cauchy de deux séries entières et donner une minoration de son rayon de convergence.

b) Montrer que, si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ vaut 1, alors le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ vaut également 1. La réciproque est-elle vraie ?

c) Montrer que les séries entières $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{A_n}{n!} x^n$ ont même rayon de convergence.

1219. a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière et le comportement pour $|z| < R$ et $|z| > R$.

b) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \tan(n)z^n$ est inférieur ou égal à 1.

On admet qu'il existe $\mu > 2$ tel que, pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\left| \frac{1}{\pi} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^\mu}$.

c) Montrer que $R = 1$.

1220. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$. Soit (E_a) l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$, d'inconnue f dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note $S_{a,k}$ l'ensemble des solutions de (E_a) qui vérifient en plus $f(0) = k$.

a) Déterminer $S_{1,k}$ et $S_{-1,k}$. Dans la suite, on suppose que $|a| < 1$.

b) Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!}$. En déduire un élément de $S_{a,k}$.

c) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que f appartient à $S_{a,k}$ si et seulement si $T(f) = f$, où $T(f) : x \mapsto k + \int_0^x f(at) dt$.

d) Montrer que $S_{a,k}$ est un singleton.

1221. a) Rappeler la règle de d'Alembert.

En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p \binom{2n}{n}}$ est définie.

b) Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}}{n^2 \binom{2n}{n}} x^{2n}$. Déterminer le rayon de convergence R de S .

c) Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \arcsin(x)^2$. Calculer A_0, A_1, A_2 .

1222. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la somme des chiffres de l'écriture binaire de n .

On pose $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et décroissante.

Montrer que $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

b) i) Donner le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.

ii) Donner une relation vérifiée par $S(x^2)$ et $S(x)$.

c) Exprimer $(1-x)S(x)$ sous forme d'une somme, puis donner un équivalent de S en R^- .

1223. Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite asymptotiquement périodique lorsqu'il existe des entiers $N \geq 0$ et $T \geq 1$ tels que $\forall n \geq N, u_{n+T} = u_n$.

a) Énoncer et démontrer le lemme d'Abel (sur les séries entières).

b) Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ asymptotiquement périodique. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ et montrer qu'il existe une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que

$$\forall z \in D_o(0, R), \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = F(z).$$

c) On définit une suite $b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $b_0 = 1$, et $b_{2n+1} = -b_n$ et $b_{2n} = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que b n'est pas asymptotiquement périodique.

1224. Soient $f : t \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ et $g : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$, prolongées continûment en 0.

a) Montrer que f est développable en série entière sur \mathbb{R} . Montrer que f et g sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

b) On admet que, si h est développable en série entière sur \mathbb{R} et que $h(0) \neq 0$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{h(x)}$ est développable en série entière en 0.

Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que, pour un $\rho > 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]-\rho, \rho[\setminus \{0\}, \frac{t e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n.$$

c) Montrer le résultat admis.

1225. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f .

- b)** Énoncer le théorème de convergence dominée ; calculer les limites de f aux bornes de D .
c) Montrer que f est de classe C^1 et étudier le signe de sa dérivée.

1226. Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x} dt$.

- a)** Rappeler le théorème de convergence dominée.
b) i) Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}^{+*} .
ii) Trouver la limite de f en 0^+ et en $+\infty$.
c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer l'existence de $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

1227. On note $C = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et S le sous-espace des fonctions continues nulles en dehors d'un segment.

Pour $f \in C$, $g \in S$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$.

a) i) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

ii) On suppose g de classe C^1 . Montrer que $\gamma(f, g)$ est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction de f , g et γ .

b) Soit $\phi \in S$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$. On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x) = n\phi(nx)$.

Soit $f \in C$. Montrer que la suite $(\gamma(f, \phi_n))$ converge simplement vers f .

c) Soit $f \in C$. Pour tous $x, \tau \in \mathbb{R}$, on pose $f_\tau(x) = f(x - \tau)$. On suppose que l'espace $\text{Vect}(f_\tau, \tau \in \mathbb{R})$ est de dimension finie. Montrer que f est de classe C^∞ .

On admettra que, si (f_1, \dots, f_n) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tel que la matrice $(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ soit inversible.

1228. a) Énoncer le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n .

On note (E) l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.

b) Montrer que $F : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$ est solution de (E) .

c) Montrer que (E) admet une unique solution J développable en série entière au voisinage de 0 et telle que $J(0) = 1$.

d) Montrer, pour tout réel $p > 1$, que $\widehat{J}(p) = \int_0^{+\infty} J(t) e^{-pt} dt$ est bien définie, et en donner une expression plus explicite.

e) Justifier qu'il existe une infinité de solutions de (E) sur \mathbb{R}^{+*} non développables en série entière au voisinage de 0.

1229. Soient $\nu \in \mathbb{R}$ et $(E) : x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$.

a) Énoncer et démontrer le théorème d'intégration des relations de comparaison.

b) Montrer l'existence d'une fonction $\ell :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ deux fois dérivable telle que y est solution de (E) sur $]0, 1[$ si, et seulement si la fonction $z = \ell y$ est solution d'une équation différentielle du type $z''(x) + \alpha(x)z(x) = 0$.

c) Résoudre l'équation (E) sur $]0, 1[$.

1230. Soit $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ paire et π -périodique. Soit $(E) : y'' + qy = 0$.

a) Montrer que l'ensemble S des solutions de (E) est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

b) Pour $y \in S$, on note $\varphi(y) : x \mapsto y(x + \pi)$. Montrer que φ est un endomorphisme de S .

c) Soit $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$ la base de S formée des solutions vérifiant $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$. Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$.

d) Étudier la parité de y_1 et y_2 .

e) Montrer que $\det A = 1$.

f) Montrer que $A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix}$ puis que $A + A^{-1} = (\text{tr } A)I_2$. En déduire que $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$. Montrer que χ_A est de la forme $X^2 - 2aX + 1$ pour un certain réel a .

1231. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On munit l'espace $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ de la norme définie par $N(A) = \sup_{j \in \llbracket 1, d \rrbracket} \sum_{i=1}^d |a_{i,j}|$.

a) Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.

b) On fixe $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $R_k : A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \mapsto A^k \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ est différentiable, et calculer sa différentielle.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \chi_{tA} \in \mathbb{R}_d[X]$ est dérivable, et calculer sa dérivée.

d) Soient $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto \chi_{tA}(B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ est dérivable, et calculer sa dérivée.

1232. a) i) Énoncer le théorème spectral.

ii) Définir l'ensemble $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et montrer l'équivalence avec la positivité du spectre.

b) On fixe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $\varphi : U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(M^T U)$. Montrer que φ admet un maximum, atteint en une matrice $U_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

c) i) On fixe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et on pose $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(\exp(tA) U_0)$.

Montrer que ψ est bien définie, continue, et dérivable en 0. Donner deux expressions de $\psi'(0)$.

ii) Conclure sur la nature du maximum de φ en U_0 .

1233. ★★ Soient U un ouvert non vide d'un espace normé E de dimension finie et $[a, b]$ un segment inclus dans U avec $a \neq b$.

a) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$.

b) Soit $f : U \rightarrow F$ où F est un espace euclidien. On suppose f différentiable sur U et df bornée sur U . Montrer que $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\|_{\text{op}} \|b - a\|$.

c) Montrer que l'inégalité est encore vérifiée si F est un espace vectoriel normé de dimension finie.

Probabilités

1234. a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.

b) On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ candidats se présentent à un poste de secrétaire. Le recruteur les rencontrent successivement et pour chacun, il doit décider s'il l'engage ou pas. Si oui, il termine le processus de recrutement sans voir les candidats suivants. Sinon, le candidat est définitivement éliminé.

La valeur de chaque candidat correspond à un score et on note $s_1 < \dots < s_n$ la liste croissante des scores obtenus. On note $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation aléatoire telle que le candidat qui passe devant le recruteur en position numéro j a obtenu le score $s_{\sigma(j)}$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

i) Déterminer la loi de S_j , variable aléatoire du score du $j^{\text{ème}}$ candidat.

ii) Déterminer la loi de R_j , variable aléatoire du rang du meilleur candidat parmi les j premiers.

c) On choisit la stratégie de refuser les m_n premiers candidats, et de choisir le premier candidat dont le score est supérieur à l'un des scores précédemment rencontrés.

i) Soit p_n la probabilité d'embaucher le meilleur candidat.

Montrer que $p_n = \frac{m_n}{n} \sum_{j=m_n+1}^n \frac{1}{j-1}$.

ii) On suppose que $\frac{m_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in \mathbb{R}$. Montrer que $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \int_x^1 \frac{dt}{t}$.

Optimiser alors x pour maximiser la probabilité de recruter le meilleur candidat.

1235. On suppose que $N \geq 2$ candidats passent un concours. Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, X_k est le nombre de tentatives du candidat numéro k pour réussir le concours. On suppose que X_1, \dots, X_N sont indépendantes et suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $S_N = X_1 + \dots + X_N$ le nombre total de tentatives, et $Y_N = \max(X_1, \dots, X_N)$ le nombre maximal de tentatives.

a) Rappeler la définition d'une loi géométrique, ainsi que ses espérance et variance.

Donner l'espérance et la variance de S_N , ainsi que la fonction génératrice de X_1 .

b) Donner les lois de S_N et Y_N .

c) i) Montrer que Y_N est d'espérance finie, puis que $\mathbf{E}(Y_N) = \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{1-q^k}$.

ii) En utilisant $f(x) = \sum_{k=1}^n x^k (1-x)^k$, donner un équivalent de $\mathbf{E}(Y_N)$ quand $N \rightarrow +\infty$.

1236. Soient E un espace préhilbertien réel, (v_1, \dots, v_n) une famille de vecteurs unitaires de E , et (X_1, \dots, X_n) une famille de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

a) Que dire d'une variable aléatoire réelle, positive et d'espérance nulle ?

b) On pose $U = \sum_{i=1}^n X_i v_i$. Calculer $\mathbf{E}(\|U\|^2)$.

c) Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

i) il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right\| < \sqrt{n}$,

ii) il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right\| > \sqrt{n}$.

d) À quelle condition ces énoncés sont-ils réalisés ?

1237. Soient X une variable aléatoire suivant $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\varphi_X : t \mapsto \mathbf{E}(e^{itX})$.

a) Montrer que X admet une espérance et la calculer. Calculer $\varphi_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(k(e^{it} - 1 - it)) dt = 2\pi \frac{k^k}{k!} e^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Retrouver la formule de Stirling. On admettra que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$.

1238. ★★ Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Calculer la fonction génératrice associée à une loi de Poisson.

b) Montrer que $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$.

c) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$.

d) Soit $x > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-\lambda n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \lambda, \\ 1 & \text{si } x > \lambda. \end{cases}$

e) Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue et nulle en dehors d'un segment, on pose

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \mathcal{L}(f)^{(k)}(n) = \int_0^x f$.

1239. On pose $\varphi(x) = -x \ln(x)$ pour $x \in]0, 1]$ et $\varphi(0) = 0$. Pour X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on pose, sous réserve d'existence, $H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(p_x)$

où $p_x = \mathbf{P}(X = x)$.

a) i) Rappeler la définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète. Donner également le rayon de convergence et la valeur de la somme des séries entières $\sum x^n$ et $\sum nx^{n-1}$.

ii) On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Justifier la finitude de $H(X)$ et calculer sa valeur.

b) On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

i) Pour $x \in]0, 1]$, on pose $\psi(x) = \sqrt{x} \ln^2(x)$. Étudier la fonction ψ et en déduire que, si X est d'espérance finie, alors $H(X)$ est finie.

ii) Que dire si $\mathbf{E}(X) = +\infty$?

c) Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^2

Montrer que si $H(X)$, $H(Y)$ et $H(Z)$ existent, alors $H(Z) \leq H(X) + H(Y)$.

1240. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Soient X une variable aléatoire discrète et A un événement non négligeable. On pose $\mathbf{E}(X | A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x | A)$.

a) Montrer que, si $X \in L^1$ et si A est un événement non négligeable, alors $\mathbf{E}(X | A)$ est bien définie.

b) Soient $(A_n)_{n \geq 0}$ un système complet d'événements et $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$. Montrer que S est une variable aléatoire et que S admet une espérance si et

seulement si $\sum |a_n| \mathbf{P}(A_n)$ converge.

c) On suppose $X \in L^1$. On suppose que, pour tout $y \in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}(Y = y) > 0$ et on pose $\mathbf{E}(X|Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{E}(X|Y = y) \mathbf{1}_{Y=y}$. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|Y)) = \mathbf{E}(X)$.

d) On suppose que X et Y sont dans L^2 , que $\mathbf{E}(X | Y) = Y$ et $\mathbf{E}(Y | X) = X$. Montrer que $X = Y$ presque sûrement.

1241. a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer : $\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n)$.

b) Soit (X_k) une suite i.i.d. de variables de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On pose $N = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, X_k > X_0\} \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$. Montrer que N est une variable aléatoire.

c) L'espérance de N est-elle finie ?

1242. Soient X une variable aléatoire réelle et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que si $X \in L^2$ alors $aX + b \in L^2$, et exprimer $\mathbf{V}(aX + b)$ en fonction de $\mathbf{V}(X)$.

b) Montrer que, si $K(X) = \frac{\mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^4)}{\mathbf{V}(X)^2} - 3$ existe alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,

il en est de même pour $K(aX + b)$, et l'exprimer en fonction de $K(X)$.

c) Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

i) il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\forall t \in]-\delta, \delta[$, $e^{tX} \in L^1$,

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $X^n \in L^1$ et $\sum \frac{\mathbf{E}(X^n)}{n!} t^n$ a un rayon de convergence non nul.

1243. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On munit \mathbb{R}^m de sa structure euclidienne habituelle. On note S sa sphère unité. Pour une famille $e = (e_i)_{i \in I}$ d'éléments de S (éventuellement infinie), on note

$\text{Coh}(e) = \sup_{\substack{(i,j) \in I^2 \\ i \neq j}} |\langle e_i, e_j \rangle|$.

a) Rappeler sans démonstration l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b) Soit $e \in S^I$. Que signifie l'égalité $\text{Coh}(e) = 0$?

- c) Soit $e \in S^I$ telle que $\text{Coh}(e) < 1$. Montrer que I est fini.
- d) Soit Z une variable aléatoire réelle bornée. Montrer que $e^{tZ} \in L^1$ pour tout réel t .
- d) Soient $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans S , tels que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ les variables $\sqrt{n}X_i$ et $\sqrt{n}Y_i$ soient de Rademacher (i.e., suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$), et X_1, \dots, X_n soient indépendantes d'une part, Y_1, \dots, Y_n indépendantes d'autre part.
Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathbf{E}(e^{t\langle X, Y \rangle}) \leq e^{t^2/2m}$.
- e) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un ensemble fini I de cardinal $\lfloor e^{m\varepsilon^2/4} \rfloor$ et une famille $e \in S^I$ telle que $\text{Coh}(e) < \varepsilon$.

1244. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

a) Montrer, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, que la série $\sum \frac{1}{n \ln^4(n)}$ converge.

b) i) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\mathbf{P}(|S_n| \geq a) \leq \frac{3n^2}{a^4}$.

ii) On pose $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{m=n}^{+\infty} (|S_m| < m^{\frac{3}{4}} \ln(m))$. Montrer que $\mathbf{P}(A) = 1$.

c) Montrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n^{3/4} \ln(n)} \right)$ converge presque sûrement vers 0.

1245. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme $T^n - 1$ dans $\mathbb{R}[T]$ puis $\mathbb{C}[T]$.

b) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} . Rappeler pourquoi $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

c) Soit un entier $p \geq 2$. Sous les hypothèses précédentes, montrer que $X + Y$ ne peut pas suivre la loi uniforme sur $\llbracket 2, 2p \rrbracket$ sachant que X et Y prennent toutes les valeurs dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ avec probabilité non nulle.