CCINP 2026 — Mathématiques 2

FILIÈRES MP – MPI

Un corrigé – J. Larochette – Lycée Leconte de Lisle, la Réunion

EXERCICE I – Réduction et calculs de puissances

Il semblerait que le sujet note implicitement I la matrice identité I_3 et n un entier naturel.

Q1. J ayant trois colonnes identiques non nulles, $\boxed{\operatorname{rg} J = 1.}$
La diagonalisabilité de J ne laisse aucun doute : elle est symétrique et réelle. On a donc 0 valeur propre d'ordre 2 car J diagonalisable et $\dim E_0(J) = \dim\ker J = 3 - \operatorname{rg} J = 2$ et une autre valeur propre simple obtenue en calculant $\operatorname{tr} J = 3$. Finalement, $\boxed{J \text{ est semblable à } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$

Q2. Notons P une matrice de passage de diagonalisation de J. On a $A = aJ + bI = P\,(aD + bI)\,P^{-1}$ donc

$$\boxed{A \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3a+b \end{pmatrix}.}$$

Q3. Comme A est diagonalisable et $\operatorname{Sp} A = \{b, 3a+b\}$ avec $b \neq 3a+b$, $\boxed{\pi_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (X - \lambda) = (X-b)(X-3a-b).}$

Q4. a) Soient Q_n et $R_n = \alpha_n + \beta_n X$ le quotient et le reste de la division euclidienne de X^n par π_A. Alors

$$X^n = \pi_A Q_n + \alpha_n + \beta_n X.$$

En évaluant en b et en $\lambda = 3a + b \neq b$, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_n + \beta_n b = b^n \\ \alpha_n + \beta_n \lambda = \lambda^n \end{cases}$$

Comme $\lambda \neq b$, on en tire

$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{\lambda b^n - b\lambda^n}{\lambda - b} = \dfrac{\lambda b^n - b\lambda^n}{3a} \\[2ex] \beta_n = \dfrac{\lambda^n - b^n}{\lambda - b} = \dfrac{\lambda^n - b^n}{3a} \end{cases}$$

Finalement, comme $\pi_A(A) = 0_3$, $A^n = R_n(A) = \alpha_n I_3 + \beta_n A$, donc $\boxed{A^n = \dfrac{\lambda b^n - b\lambda^n}{3a} I + \dfrac{\lambda^n - b^n}{3a} A.}$

---

b) On montre par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 1,\ J^k = 3^{k-1} J.}$ C'est en effet bien le cas pour $k = 1$, on calcule $J^2 = 3J$ donc c'est aussi le cas pour $k = 2$ et si $k \geqslant 1$ est tel que $J^k = 3^{k-1}J$, alors $J^{k+1} = 3^{k-1}J^2 = 3^k J$ ce qui établit la récurrence.
Comme les matrices I et J commutent, on calcule avec la formule du binôme de Newton,

$$\boxed{A^n} = (aJ + bI)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} J^k = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} J + b^n I = \boxed{\frac{(3a+b)^n - b^n}{3} J + b^n I}$$

On peut bien sûr vérifier en remplaçant A par $aJ + bI$ dans la première que les deux expressions de A^n sont équivalentes.

EXERCICE II – Matrices et déterminants circulants

Q5. Comme $\mathrm{j} \neq 1$, $\boxed{1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = \dfrac{1-\mathrm{j}^3}{1-\mathrm{j}} = 0.}$ On a $\mathbb{U}_3 = \left\{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\right\}$, $\mathrm{j}^4 = \mathrm{j}$ et $\mathrm{j}^2 = -1-\mathrm{j}$.

Si P est n'importe quel polynôme à coefficient réel, Alors

$$P(\mathrm{j})P\left(\mathrm{j}^2\right) = \left(2-\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\right)\left(2-\mathrm{j}^2+\mathrm{j}\right) = (1-2\mathrm{j})(3+2\mathrm{j}) = 3-4\mathrm{j}-4\mathrm{j}^2 = 7.$$

donc $\boxed{P(\mathrm{j})P\left(\mathrm{j}^2\right) \in \mathbb{R}.}$

En réalité, on a $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$. Donc si P est n'importe quel polynôme à coefficient réel, alors

$$P(\mathrm{j})P\left(\mathrm{j}^2\right) = P(\mathrm{j})P\left(\bar{\mathrm{j}}\right) = P(\mathrm{j})\overline{P(\mathrm{j})} = |P(\mathrm{j})|^2 \in \mathbb{R}...$$

Q6. On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + XC_2 + X^2C_3 - \cdots + X^{n-1}C_n$, puis on développe par rapport à la première colonne. On obtient

$$\chi_J = \begin{vmatrix} X & -1 & & & (0) \\ & X & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & X & -1 \\ -1 & & & & X \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & & & (0) \\ & X & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & X & -1 \\ X^n-1 & & & & X \end{vmatrix}_n = (-1)^{n+1}\left(X^n-1\right)\begin{vmatrix} -1 & & & (0) \\ X & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & X & -1 \end{vmatrix}_{n-1},$$

d'où on tire $\boxed{\chi_J = X^n - 1.}$

Q7. On remarque que $\boxed{A = P(J).}$

Q8. Comme χ_J est scindé à racines simples, de spectre $\mathbb{U}_n = \{\omega_k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$,

$$\boxed{J \text{ est semblable à } \operatorname{diag}\left(\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}\right)}$$

donc

$$\boxed{A = P(J) \text{ est semblable à } \operatorname{diag}\left(P(\omega_0), \ldots, P(\omega_{n-1})\right).}$$

Q9. On a alors, comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) = \det A \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Si } P(1) \neq 0,}$ on en déduit que $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) = \frac{\det A}{P(1)} \in \mathbb{R}.}$

$\boxed{\text{Supposons désormais que } P(1) = 0.}$ Avec la question précédente, on a

$$\chi_A = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - P\left(\omega_k\right)\right) = X\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - P\left(\omega_k\right)\right) \in \mathbb{R}[X].$$

Or le coefficient de degré 1 dans χ_A vaut $(-1)^{n-1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k)$ donc $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) \in \mathbb{R}.}$

PROBLÈME – Polynômes de Laguerre

Q10. a) Soit $x \in E$, et $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$ base orthonormale de F.

Alors $y = \sum_{i=0}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i \in F$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\langle x - y|e_j\rangle = \langle x|e_j\rangle - \langle y|e_j\rangle$. Or $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de F et $y \in F$, donc $\langle y|e_j\rangle$ est la coordonnée de y selon e_j, c'est-à-dire $\langle x|e_j\rangle$. Donc $\langle x - y|e_j\rangle = 0$ et $x - y \in F^{\perp}$.

Par unicité, $\boxed{y = \sum_{i=0}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i = p_F(x).}$

---

b) Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de F, $\|p_F(x)\|^2$ est la somme des carrés des coordonnées de $p_F(x)$ dans $\mathcal{B}$ et, par théorème de Pythagore, comme $p_F(x) \perp x - p_F(x)$,

$$\|x\|^2 = \|p_F(x) + x - p_F(x)\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

d'où l'inégalité de Bessel $\boxed{\sum_{i=0}^{n} \langle x|e_i\rangle^2 = \|p_F(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2.}$

Q11. En développant $(|a| - |b|)^2 \geqslant 0$, on obtient l'inégalité classique $\boxed{|ab| \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2}.}$

Soient f et g deux fonctions de E. Alors la fonction $h : t \mapsto f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $I = \mathbb{R}^+$ par opérations et pour tout $t \in I$,

$$|h(t)| = |f(t)g(t)|\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{2}\big(f(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\big(g(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t}$$

où le membre de droite définit une fonction intégrable sur I par définition de E et car $\mathcal{L}^1(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, donc, par comparaison, $\boxed{h \in \mathcal{L}^1(I).}$

Q12. On montre que $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}(I, \mathbb{R}).}$

- $E \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$;
- $E \neq \varnothing$ car contient la fonction nulle ;
- Si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est une fonction continue telle que pour tout $t \in I$,

$$\big(f(t) + \lambda g(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t} = \big(f(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t} + 2\lambda f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t} + \lambda^2\big(g(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t}$$

  donc $t \mapsto \big(f(t) + \lambda g(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t} \in \mathcal{L}^1(I)$ par définition de E, par la question précédente, et par linéarité.

Montrons maintenant que $\boxed{\langle \cdot | \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

Bonne définition Si $f, g \in E$, la question précédente assure la convergence de l'intégrale définissant le réel $\langle f|g\rangle$.

Symétrie Si $f, g \in E$, on a bien $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle$.

Bilinéarité Si $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle f_1 + \lambda f_2|g\rangle = \langle f_1|g\rangle + \lambda\langle f_2|g\rangle$ par linéarité de l'intégrale.
Cela donne la linéarité à gauche du produit scalaire, la linéarité à droite en découle par symétrie.

Défini-positivité Si $f \in E$, $\langle f|f\rangle \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale, et si $\langle f|f\rangle = 0$, comme la fonction $t \mapsto \big(f(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t}$ est continue et positive sur I,

$$\forall\, t \geqslant 0,\quad \big(f(t)\big)^2\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{>0} = 0$$

donc $f = 0_E$.

Q13. Les fonctions polynomiales de degré au plus n sont bien des fonctions continues sur I. De plus, si f en est une, $t \mapsto \big(f(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction continue sur I telle que $\big(f(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ comme fonction de Riemann avec $2 > 1$, on a bien $t \mapsto \big(f(t)\big)^2\mathrm{e}^{-t}$ intégrable sur I.

Ainsi, $F \subset E$ et comme, par ailleurs, $(F, +, \cdot)$ a une structure connue de $\mathbb{R}$-espace vectoriel,

$$\boxed{F \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } E.}$$

Le « ainsi » du sujet est surprenant : on nous demande de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E pour définir le produit scalaire sur... $\mathbb{R}[X]$?

Q14. a) Supposons $p \leqslant n$. On utilise la formule de Leibniz avec $f_n : x \mapsto x^n$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il vient

$$h_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f_n^{(k)} g^{(p-k)} : x \mapsto \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{p-k} x^{n-k} \mathrm{e}^{-x}$$

donc $\boxed{h_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} h_{n-k}.}$

Comme pour tout $n \geqslant 1$, $h_n(0) = 0$, on a, pour $p < n$, comme $k \leqslant p < n$, $n - k \neq 0$ donc $\boxed{h_n^{(p)}(0) = 0.}$

---

b) Avec la question précédente, on tire que

$$L_n : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{\binom{n}{k}}{(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{k!} x^k$$

en ayant effectué le changement d'indice $k \mapsto n - k$ dans la dernière somme.

On a alors $\boxed{L_n \in \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X],\ \deg L_n = n \text{ et } \operatorname{cd} L_n = \frac{(-1)^n}{n!}.}$

Q15. Il y a une erreur d'énoncé. Le sujet veut sans doute nous faire exprimer $\int_0^{+\infty} g \times h_n^{(n)}$ (et non $\langle g | h_n^{(n)} \rangle$) en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)} \times h_n$.

Posons $J_k = \int_0^{+\infty} g^{(n-k)} \times h_n^{(k)}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. Par intégration par parties, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\int_0^x g^{(n-k)} \times h_n^{(k)} = \left[g^{(n-k)} \times h_n^{(k-1)} \right]_0^x - \int_0^x g^{(n-k+1)} \times h_n^{(k-1)}.$$

Or $\left[g^{(n-k)}(t) \times h_n^{(k-1)}(t) \right]_0^x = g^{(n-k)}(x) \times h_n^{(k-1)}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées (de la forme polynôme multiplié par e^{-x}), donc, en faisant $x \to +\infty$ dans l'intégration par parties,

$$J_k = -J_{k-1}.$$

On a alors $J_n = (-1)^n J_0$, donc $\boxed{\int_0^{+\infty} g \times h_n^{(n)} = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)} \times h_n.}$

On a enfin $\boxed{\langle g | L_n \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g \times h_n^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)} \times h_n.}$

Q16. Supposons $i < j \leqslant n$ afin que $L_i, L_j \in F = \mathbb{R}_n[X]$ **ce qui n'a aucune importance ici, l'énoncé est surprenant...**

Alors, d'après la question précédente applicable à l'entier j à la place de n et avec $g = L_i$,

$$\boxed{\langle L_i | L_j \rangle} = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(j)} \times h_j = \boxed{0}$$

car L_i est un polynôme de degré $i < j$.

Q17. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Par intégration par parties, si $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \geqslant 1$, on a

$$\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^n \mathrm{e}^{-t}\right]_0^x + n\int_0^x t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\left[-t^n \mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = -x^n \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées.

On en déduit que $\forall\, n \geqslant 1,\quad I_n = nI_{n-1}$. On en tire $I_n = n!I_0$ avec $I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$.

On a donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!.}$

On calcule alors, toujours en utilisant **Q15** avec cette fois $g = L_n$ polynôme de degré n,

$$\langle L_n | L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t)\times t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} n!\,\mathrm{cd}\,L_n \times t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}I_n$$

donc $\boxed{\langle L_n | L_n\rangle = 1.}$

Q18. Des deux questions précédentes, on tire que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ constituée de $n+1 = \dim F$ vecteurs de $F = \mathbb{R}_n[X]$ en est une $\boxed{\text{base orthonormale.}}$ On a donc, pour tout $g \in E$, $\boxed{p_F(g) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \langle g | L_i\rangle L_i.}$

Q19. D'après l'inégalité de Bessel remontrée en début de problème et la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \langle g | L_i\rangle^2 \leqslant \|g\|^2$. La série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \langle g | L_n\rangle^2$ a donc toutes ses sommes partielles majorées par $\|g\|^2$.

On en déduit que $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \langle g | L_n\rangle^2 \text{ converge et que } \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g | L_n\rangle^2 \leqslant \|g\|^2.}$

Q20. Encore une étrangeté du sujet : on définit g_α pour $\alpha > -\frac{1}{2}$, puis on nous fait étudier g_α pour $\alpha \in \mathbb{R}$...

Soit, donc, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors g_α est continue sur I et $t \mapsto (g_\alpha(t))^2 \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(-2\alpha-1)t}$ est intégrable sur $I = [0, +\infty[$ si et seulement si $-2\alpha - 1 < 0$ c'est-à-dire $\alpha > -\frac{1}{2}$ par critère d'intégrabilité des fonctions exponentielles.

Ainsi, $\boxed{g_\alpha \in E \text{ si et seulement si } \alpha > -\frac{1}{2}.}$ **C'est donc bien une nouvelle erreur d'énoncé.**

On suppose désormais que $\alpha > -\frac{1}{2}$. On calcule, à l'aide de la question **Q15**,

$$\langle g_\alpha | L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} g_\alpha^{(n)}(t) t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha^n}{n!}\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha^n}{n!(\alpha+1)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{\alpha+1}\right)^n \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

en ayant posé $u = (\alpha+1)t$ dans la dernière intégrale, avec $\alpha + 1 > \frac{1}{2} > 0$.

De la question **Q17**, on tire $\langle g_\alpha | L_n\rangle = \dfrac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}}$.

Comme somme de série géométrique convergente d'après la question précédente, on calcule ensuite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n\rangle^2 = \frac{1}{(\alpha+1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\right)^n = \frac{1}{(\alpha+1)^2}\times\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}} = \frac{1}{(\alpha+1)^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha+1}.$$

Parallèlement, on a $\|g_\alpha\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\alpha+1}$.

Finalement, on a bien $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n\rangle^2 = \|g_\alpha\|^2}$ donc la majoration de la question précédente est optimale.

FIN