CCINP 2026 — Mathématiques 1

FILIÈRES MP – MPI

Un corrigé – J. Larochette – Lycée Leconte de Lisle, la Réunion

EXERCICE I

Q1.

SQL
```sql
SELECT DISTINCT email FROM eleves WHERE promo != 2025;
```

Q2.

SQL
```sql
SELECT nom, prenom, sum(montant)
FROM eleves e JOIN paiements ON e.id = id_eleve
GROUP BY id_eleve
ORDER BY nom, prenom;
```

Ici, on assume qu'un `id` d'élève ne peut pas être associé à plusieurs couples (`nom`, `prenom`).
Sinon, on peut toujours remplacer la clause `GROUP BY` par `GROUP BY id_eleve, nom, prenom`.

Q3.

SQL
```sql
SELECT DISTINCT e1.id, e1.email
FROM eleves e1, eleves e2
WHERE e1.id != e2.id
  AND (e1.nom, e1.prenom, e1.email, e1.promo) = (e2.nom, e2.prenom, e2.email, e2.promo);
```

ou bien

SQL
```sql
SELECT DISTINCT e1.id, e1.email
FROM eleves e1 JOIN eleves e2
               ON (e1.nom, e1.prenom, e1.email, e1.promo) = (e2.nom, e2.prenom, e2.email, e2.promo)
WHERE e1.id != e2.id;
```

ou bien

SQL
```sql
SELECT DISTINCT id, email FROM eleves e
WHERE EXISTS(SELECT * FROM eleves
             WHERE id != e.id
               AND (nom, prenom, email, promo) = (e.nom, e.prenom, e.email, e.promo));
```

ou bien

SQL
```sql
SELECT DISTINCT id, email FROM eleves e
WHERE 0 < (SELECT COUNT(*) FROM eleves
           WHERE id != e.id
             AND (nom, prenom, email, promo) = (e.nom, e.prenom, e.email, e.promo));
```

ou bien

SQL
```sql
SELECT DISTINCT id, email FROM eleves e
WHERE id IN (SELECT id FROM eleves
             WHERE id != e.id
               AND (nom, prenom, email, promo) = (e.nom, e.prenom, e.email, e.promo));
```

ou bien

```sql
SELECT DISTINCT id, email FROM eleves e
WHERE email IN (SELECT email FROM eleves
                GROUP BY nom, prenom, email, promo
                HAVING COUNT(*) > 1);
```

Q4.

```sql
SELECT id FROM eleves
WHERE id NOT IN (SELECT id_eleve FROM paiements);
```

ou bien

```sql
SELECT id FROM eleves e
WHERE NOT EXISTS (SELECT * FROM paiements WHERE e.id = id_eleve);
```

ou bien

```sql
SELECT id FROM eleves e
WHERE 0 = (SELECT COUNT(*) FROM paiements WHERE id_eleve = e.id);
```

ou bien

```sql
SELECT id FROM eleves
EXCEPT
SELECT id_eleve FROM paiements;
```

ou bien

```sql
SELECT id
FROM eleves e LEFT JOIN paiements ON e.id = id_eleve
WHERE id_eleve IS NULL;
```

EXERCICE II

Q5. On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$, donc le rayon de convergence de la série entière définissant G_X est au moins égal à 1. Comme il y a convergence absolue en $t = \pm 1$, $\boxed{G_X \text{ est définie (au moins sur) } [-1, 1].}$

Autre argument possible : pour tout $t \in [-1, 1]$, $\left|\mathbb{P}(X = n)t^n\right| \leqslant \mathbb{P}(X = n)$, donc la série $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ converge normalement donc simplement sur $[-1, 1]$.

Q6. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors $\boxed{G_X : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$ En effet, si $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}t^n = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

en reconnaissant une série exponentielle (donc convergente).

Q7. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et $t \in]-1, 1[$, ce qui assure que t soit dans les intervalles ouverts de convergence de G_X et G_Y donc de leur produit de Cauchy, par produit de Cauchy,

$$\begin{aligned} \boxed{G_X(t)G_Y(t)} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k)\right)t^n \underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X = k, Y = n-k)\right)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X + Y = n)t^n = \boxed{G_{X+Y}(t).} \end{aligned}$$

Q8. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes.
Alors, avec les questions précédentes, pour $t \in]-1, 1[$,

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(t-1)}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant $\mathcal{G}(\lambda+\mu)$.
Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que $\boxed{X + Y \sim \mathcal{G}(\lambda + \mu).}$

PROBLÈME

Partie I – Calcul d'une intégrale

Q9. Soit $x > 0$ et $f : t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
Alors f est continue par opérations sur $\mathbb{R}$. Puis,

$$|f(t)| = \frac{x}{x^2+t^2} \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \frac{x}{t^2}$$

donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ par comparaison à une intégrale de Riemann avec $2 > 1$.
Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale définissant g converge et $\boxed{g \text{ est bien définie sur }]0, +\infty[.}$

Q10. Soit $x > 0$. On effectue un changement de variable $t = xu$ (bijectif strictement croissant de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Alors

$$\boxed{g(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+(xu)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}x\,\mathrm{d}u = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u}$$

On en déduit que, pour tout $x > 0$, dans $[0, +\infty]$,

$$|g(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}}{1+u^2}\right|\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[\mathrm{Arctan}(u)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi < +\infty$$

donc $\boxed{g \text{ est bornée sur }]0, +\infty[.}$

Q11. On utilise le théorème de convergence dominée en posant $h : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,u) & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}}{1+u^2}\end{array}\right.$

H1 Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $h(x,u) \xrightarrow[x\to 0^+]{} H(u) = \dfrac{1}{1+u^2}$.

H2 H et toutes les $u \mapsto h(x,u)$ pour $x > 0$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

H3 Pour tout $(x,u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$|h(x,u)| = \varphi(u) = \frac{1}{1+u^2}$$

où φ est positive, continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ (et d'intégrale égale à π comme vu précédemment).
(Bien sûr, un $\leqslant$ suffisait).

Par théorème de convergence dominée, $\boxed{g(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \pi.}$

Q12. On utilise le théorème de classe $\mathcal{C}^2$ des intégrales à paramètre, ce qui n'est possible qu'avec la première forme de g. On pose donc, cette fois, $h_1 : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\end{array}\right.$

H1 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h_1(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{x^2+t^2-2x^2}{\left(x^2+t^2\right)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{t^2-x^2}{\left(x^2+t^2\right)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} : (x,t) \mapsto \frac{-2x\left(x^2+t^2\right)^2 - 4x\left(t^2-x^2\right)\left(x^2+t^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{-2x\left(x^2+t^2\right) - 4x\left(t^2-x^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{2x\left(x^2-3t^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

H2 Pour tout $x > 0$ et tout $k \in \{0,1,2\}$, $\dfrac{\partial^k h_1}{\partial x^k}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

H3 Soit $x > 0$.

- $|h_1(x,t)| \sim \dfrac{x}{t^2}$ lorsque $t \to \pm\infty$, donc, par comparaison à une fonction de Riemann intégrable, $t \mapsto h_1(x,t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
- $\left|\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(x,t)\right| \sim \dfrac{1}{t^2}$ lorsque $t \to \pm\infty$, donc, par comparaison à une fonction de Riemann intégrable, $t \mapsto \dfrac{\partial h_1}{\partial x}(x,t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

H3 Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in [a,b]$ où $0 < a < b$,

$$\left|\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{2b\left(b^2+3t^2\right)}{\left(a^2+t^2\right)^3} = \psi(t)$$

où ψ est positive, continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ car, lorsque $t \to \pm\infty$, $\psi(t) \sim \dfrac{6b}{t^4}$ où l'on reconnaît une fonction de Riemann intégrable au voisinage de $\pm\infty$ car $4 > 1$.

Ainsi, $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$ De plus, $g'' : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\left(x^2-3t^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$.

Q13. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On pose $\zeta(x,t) = \dfrac{x}{x^2+t^2}$. Comme dans la question précédente, on calcule

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(x,t) = \frac{2x\left(x^2-3t^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^3}.$$

Ensuite,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t) = -\frac{2xt}{\left(x^2+t^2\right)^2} = -2xt\left(x^2+t^2\right)^{-2},$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(x,t) = -2x\left(x^2+t^2\right)^{-2} + 8xt^2\left(x^2+t^2\right)^{-3} = -\frac{2x\left(x^2+t^2\right)-8xt^2}{\left(x^2+t^2\right)^3} = -\frac{2x\left(x^2-3t^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^3}.$$

Bref, $\boxed{\Delta\zeta = \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \text{ est constamment nulle.}}$

On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$g''(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$

Effectuons une double intégration par partie en intégrant $t \mapsto \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(x,t)$ puis $t \mapsto \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t)$ et en dérivant deux fois $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Soit $A, B \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_A^B \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right]_A^B - \mathrm{i}\int_A^B \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right]_A^B - \mathrm{i}\left(\left[\zeta(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right]_A^B - \mathrm{i}\int_A^B \zeta(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t) - \mathrm{i}\zeta(x,t)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right]_A^B - \int_A^B \zeta(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

avec $\left|\dfrac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t) - \mathrm{i}\zeta(x,t)\right| \leqslant \dfrac{2x\,|t|}{\left(x^2+t^2\right)^2} + \dfrac{x}{x^2+t^2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0.$

Ainsi, en faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$, on obtient, $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ g''(x) = g(x).}$

Q14.

- On tire de la question précédente qu'il existe des constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que $g : x \mapsto A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x}$ (car $(x \mapsto \mathrm{e}^{x}, x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$ est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle trouvée.)
- Comme g est bornée au voisinage de $+\infty$ (question **Q10**), $A = 0$.
- Comme $g(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \pi$ (question **Q11**), $B = \pi$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ g(x) = \pi\mathrm{e}^{-x}.}$

Partie II – Formule sommatoire de Poisson

Q15. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$0 \leqslant f(x \pm n) = \frac{1}{1+(x\pm n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge ($2>1$), par comparaisons de termes généraux positifs, $\sum f(x+n)$ et $\sum f(x-n)$ convergent et $\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

De plus, si $x \in \mathbb{R}$, $x+1 \in \mathbb{R}$ et

$$F(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+(n+1)) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-(n-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x+n) + f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n) = F(x)$$

donc $\boxed{F \text{ est 1-périodique.}}$

Q16. On remarque que $F : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f(x+n)+f(x-n)\right)$ avec $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ continue sur $[0,1]$.

Appliquons le théorème de continuité des séries de fonctions à $f_n : x \mapsto f(x+n)+f(x-n) = \dfrac{1}{1+(x+n)^2} + \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$ sur $[0,1]$.

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bien continue sur $[0,1]$.

H2 Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \geqslant 2$,

$$|f_n(x)| = f_n(x) = \frac{1}{1+n^2+2nx+x^2} + \frac{1}{1+n^2-2nx+x^2} \leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2-2n} \leqslant \frac{2}{n^2-2n}$$

donc $0 \leqslant N_{\infty,[0,1]}(f_n) \leqslant \dfrac{2}{n^2-2n} \sim \dfrac{2}{n^2}$ qui est un terme général de série convergente.

Par comparaison de séries à termes généraux positifs, on obtient la convergence normale donc uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

On en déduit que $\boxed{F \text{ est continue sur } [0,1],}$ et, par 1-périodicité démontrée à la question précédente, $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R},}$ en remarquant que le continuité à droite de 0 et celle à gauche de 1 avec $F(0) = F(1)$ donne bien la continuité en tout entier.

Q17. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$c_k(F) = \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t$$

Or la convergence normale de $\sum f_n$ et le fait que $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}$ soit de module 1 assure la convergence normale donc uniforme de $\sum f_n(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}$ sur le segment $[0,1]$.

On peut donc intervertir.

$$c_k(F) = \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f(t+n)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f(t-n)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t$$

On effectue le changement de variable $u = t + n$ dans l'intégrale de la première somme et $u = t - n$ celle de la deuxième somme. On obtient

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(u)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k(u-n)}\,\mathrm{d}u + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-n}^{-(n-1)} f(u)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k(u+n)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(u)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ku}\,\mathrm{d}u + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-n}^{-(n-1)} f(u)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ku}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

en utilisant le fait que si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\pi kn} = 1$.
Or, en revenant aux sommes partielles et en utilisant la relation de Chasles,

$$\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1} f(u)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ku}\,\mathrm{d}u = \int_1^{N+1} f(u)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ku}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t$$

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{-n}^{-(n-1)} f(u)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ku}\,\mathrm{d}u = \int_{-N}^{0} f(u)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ku}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t$$

On a donc bien $\boxed{c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t.}$

Q18. Soit $n, k \in \mathbb{Z}$.

Si $n + k = 0$, alors $\boxed{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi(n+k)t}\,\mathrm{d}t = 1.}$

Si $n + k \neq 0$, alors $\boxed{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi(n+k)t}\,\mathrm{d}t = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi(n+k)t}}{-2\mathrm{i}\pi(n+k)}\right]_0^1 = 0.}$

Ainsi, $\boxed{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi(n+k)t}\,\mathrm{d}t = \delta_{n,-k}.}$

Partie III – Applications

Q19. D'après **Q17**, $\boxed{c_0(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \pi.}$

Soit $k > 0$. D'après **Q17**, **Q10**, **Q14** et en commençant par un changement de variable $u = -t$ (on remarque que f est paire), $\boxed{c_k(F)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi ku}\,\mathrm{d}u = g(2k\pi) = \boxed{\pi\mathrm{e}^{-2k\pi}}$ (valable pour $k = 0$).

Q20. G est bien définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $n \geqslant 1$, $\left|c_n(F)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nx}\right| = c_n(F) = \pi\mathrm{e}^{-2n\pi}$ est un terme général de série géométrique convergente, et $\left|c_{-n}(F)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nx}\right| = c_{-n}(F) = c_n(F)$.

Ensuite, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\quad G(x) = \pi + \pi\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2n\pi}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nx} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nx}\right) = \pi + 2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2n\pi}\cos(2\pi nx)$.

On en tire alors $\boxed{\text{la 1-périodicité de } G.}$

Reste à appliquer le théorème de continuité des séries de fonctions à $g_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-2n\pi}\cos(2\pi nx)$.

H1 Pour tout $n \geqslant 1$, g_n est continue sur $\mathbb{R}$.

H2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geqslant 1$, $|g_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-2n\pi}$ terme général de série convergente indépendant de x.
Donc $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Finalement, $\boxed{G \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

Q21. Vu le résultat admis et les résultats précédents, comme F et G sont continues sur $\mathbb{R}$ et 1 périodiques, il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(F) = c_k(G)$.
Or, si $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k(G) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(n-k)t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(-n-k)t}\,\mathrm{d}t$$

avec $\left|c_n(F)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(n-k)t}\right| = c_n(F) = c_{-n}(F) = \left|c_{-n}(F)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(-n-k)t}\right|$ terme général de série convergente (c'est toujours $\pi\mathrm{e}^{-2n\pi}$), il y a donc convergence normale donc uniforme et on peut intervertir avec l'intégrale sur le segment $[0,1]$.
Ainsi, en utilisant **Q18**,

$$c_k(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F)\int_0^1 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(n-k)t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F)\int_0^1 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(-n-k)t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F)\delta_{n,k} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F)\delta_{n,-k} = c_k(F)$$

car n prend exactement une fois soit la valeur de $k \geqslant 0$, soit la valeur de $-k \geqslant 1$.
Le résultat admis nous permet alors de conclure que $\boxed{F = G.}$

Q22. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\boxed{F(x)} &= G(x) = \pi + 2\pi\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2n\pi}\cos(2\pi n x) = -\pi + 2\pi\mathfrak{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2n\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n x}\right) = -\pi + 2\pi\mathfrak{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-2\pi+2\mathrm{i}\pi x}\right)^n\right) \\
&= -\pi + 2\pi\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi+2\mathrm{i}\pi x}}\right) \quad \text{avec } \left|\mathrm{e}^{-2\pi+2\mathrm{i}\pi x}\right| = \mathrm{e}^{-2\pi} < 1 \\
&= -\pi + 2\pi\mathfrak{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi-2\mathrm{i}\pi x}}{\left|1-\mathrm{e}^{-2\pi+2\mathrm{i}\pi x}\right|^2}\right) \\
&= -\pi + 2\pi\frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}\cos(2\pi x)}{\left(1-\mathrm{e}^{-2\pi}\cos(2\pi x)\right)^2 + \mathrm{e}^{-4\pi}\sin^2(2\pi x)} \\
&= -\pi + 2\pi\frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}\cos(2\pi x)}{1-2\mathrm{e}^{-2\pi}\cos(2\pi x)+\mathrm{e}^{-4\pi}} \\
&= \boxed{\pi\frac{1-\mathrm{e}^{-4\pi}}{1-2\mathrm{e}^{-2\pi}\cos(2\pi x)+\mathrm{e}^{-4\pi}}.}
\end{aligned}$$

FIN