Autres Écoles – MP

Algèbre

1354. [IMT] Soient a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est un nombre premier.

1355. [IMT] Résoudre l'équation $x^2 + x + \overline{1} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

1356. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.
Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1357. [IMT]
a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nilpotents et non nuls tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\mathrm{rg}(u \circ v) < \mathrm{rg}(v)$.
b) Soient $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nilpotents et commutant deux à deux.
Montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

1358. [CCINP] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = J$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les valeurs propres de J. En déduire les valeurs propres éventuelles de M.
b) Trouver un polynôme annulateur de M. Montrer que M est diagonalisable.
c) Déterminer les matrices M solutions.

1359. [IMT] Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

1360. [IMT] Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A(c) = \begin{pmatrix} -c & 1 & -1 \\ 1 & 1-c & 1 \\ -1 & -1 & -c \end{pmatrix}$.

a) La matrice $A(c)$ est-elle diagonalisable ?

b) Trouver $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}A(c)P$ soit triangulaire supérieure.

1361. [IMT] Soient $a > 0$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a^2 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer Au. Que peut-on en déduire ?

b) Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ?

c) Déterminer le spectre réel de A.

d) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

1362. [IMT] Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1363. [IMT] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres de A, ainsi que la dimension de ses sous-espaces propres.

1364. [IMT] Soit $n \geqslant 2$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,j} = -1$ si $i > j$, $a_{i,j} = 1$ si $i < j$ et $a_{i,i} = 0$. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que : $P : x \mapsto \det(\lambda I_n - A - xJ)$ est polynomiale de degré au plus 1.

b) En déduire χ_A.

c) Étudier la diagonalisabilité de A.

1365. [CCINP] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathbb{R}_n[X]$ non nuls. On considère l'application f qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

a) Montrer que f est un endomorphisme. Est-ce un automorphisme ?

b) On note p le degré de B et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses racines.

  i) Montrer que 0 est valeur propre de f.

  ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ une valeur propre de f. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $A(\lambda_i) = \alpha$.

iii) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

1366. [IMT] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quels réels a la suite $(a^n A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

1367. [IMT] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\alpha \neq 0$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.
a) Donner une expression simple de $f^n \circ g - g \circ f^n$.
b) En s'intéressant à $h \mapsto h \circ g - g \circ h$, montrer que f est nilpotente.

1368. [CCINP] Soit $A = \left(\dfrac{i}{j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) La matrice A est-elle inversible ?
b) Trouver un polynôme annulateur de A.
c) Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
d) Donner les sous-espaces propres de A.
e) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec A. Montrer que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont stables par M.

1369. [IMT] Soient $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A, B \in E \setminus \{0\}$ et $f : M \in E \mapsto \mathrm{Tr}(AM)\, B$.
a) Quels sont les éléments propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
b) On note $\mathcal{C} = \{k \in \mathbb{R}^+ \ ; \ \forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(f(M)^2) \leqslant k\,\mathrm{Tr}(M^2)\}$. Montrer que $\mathcal{C} \neq \emptyset$ et déterminer son minimum.

1370. [CCINP] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.
a) On suppose que f^2 est inversible et diagonalisable. À l'aide d'un polynôme annulateur de f, montrer que f est diagonalisable.
b) On suppose que f^2 n'est plus inversible, que f^2 est diagonalisable et que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$. Montrer que f est diagonalisable.

1371. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

1372. [CCINP] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.
a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$.
b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$ non nul. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.
c) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
d) Construire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^2 = f$.

1373. [IMT] Donner toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^5 = M^2$ et $\mathrm{Tr}(M) = n$.

1374. [Dauphine] Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

On suppose a_1 et a_n non nuls.

a) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

b) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, justifier que A n'est pas toujours diagonalisable avec un contre-exemple pour $n = 2$.

1375. [CCINP] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'un projecteur de rang $p \in [\![1, n]\!]$.

On pose $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & -A \end{pmatrix}$

a) La matrice B est-elle diagonalisable ? *Ind.* On pourra calculer B^3.

b) Calculer les sous-espaces propres éventuels de B et donner leur dimension en fonction de n et p

1376. [Navale] On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.
Calculer la distance de la matrice $M = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ à l'espace F des matrices de trace nulle.

1377. [Navale] On munit $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$. On pose $e_1 : t \mapsto 1$, $e_2 : t \mapsto t$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Calculer la distance de $\Phi : t \mapsto t^2$ à l'espace F.

1378. [IMT] Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que, pour tout $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathrm{Sp}(MM^T) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(M^TM)$.

b) Montrer que, pour $\lambda \neq 0$, les dimensions des espaces propres de MM^T et M^TM sont les mêmes.

c) Relier les polynômes caractéristiques de MM^T et de M^TM.

1379. [CCINP] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux

b) Déterminer la distance de $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

1380. [CCINP] On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, et on fixe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

a) On pose $H_v = I_n - 2\dfrac{v^Tv}{\|v\|^2}$. Montrer que $H_v \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

b) Quelle est la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_v ?

c) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $\|x\| = \|y\|$.

i) Montrer que les vecteurs $x - y$ et $x + y$ sont orthogonaux.

ii) Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $Vx = y$.

1381. [IMT] Soit E l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'application qui à $(f,g) \in E^2$ associe $\langle f,g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} fg$ définit un produit scalaire sur E.
b) Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto \sin^2(x)$ sur $\mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x))$.

1382. [CCINP] On munit $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et w celui associé à A^T.
a) Montrer que : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, w(y)\rangle$.
b) Montrer que, si un sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par w.
c) On choisit ici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Calculer χ_A. Les matrices A^T et A sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
ii) Déterminer les sous-espaces stables par u.

1383. [Navale] Soit $n \geqslant 2$. Soit $F : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB)$.
On note $E_{i,j}$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Calculer $\mathrm{tr}(E_{i,j}A)$ pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F(A, M) = 0$. Montrer que $A = 0$.
c) Soit u un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, si $v : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F(u(A), B) = F(A, v(B))$, alors v est linéaire.
d) L'application F définit-elle un produit scalaire ?

1384. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$ avec $A \neq 0$.
a) Trouver un polynôme annulateur non nul de A.
b) Lorsque $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, trouver $\mathrm{Sp}(A)$ et montrer que A est orthogonalement semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1385. [CCINP] Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{S}(E)$. On note a (resp. b) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de f.
a) Montrer que $a\,\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant b\,\|x\|^2$ pour tout $x \in E$.
b) Soit $r \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x\rangle \leqslant r\|x\|^2$. Montrer que $b \leqslant r$.
c) Soit $k \in \mathbb{R}$. On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,i} = k$, $a_{i,j} = 1$ si $i = j \pm 1$, $a_{i,j} = 0$ sinon. Montrer que la plus grande valeur propre de A est inférieure ou égale à $k+2$.

1386. [IMT] Soient E un espace euclidien et $a, b \in E$ unitaires et non colinéaires. On considère $\varphi : x \mapsto \langle a, x\rangle\, a + \langle b, x\rangle\, b$. Montrer que φ est un endomorphisme autoadjoint et donner ses éléments propres.

1387. [IMT] Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$ et deux vecteurs a, b de E non colinéaires. On considère l'endomorphisme $f : x \in E \mapsto \langle a, x\rangle\, a + \langle b, x\rangle\, b$. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ puis montrer que f est autoadjoint.

1388. [IMT] Soient $M, N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que : $0 \leqslant \mathrm{tr}(MN) \leqslant (\mathrm{tr}\, M)(\mathrm{tr}\, N)$.

1389. [IMT] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de polynôme caractéristique noté χ_A. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ et que $\|A\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

1390. [IMT] Soient E un espace euclidien de dimension n et F un sous-espace de dimension $r \in [\![1, n-1]\!]$. Soit p le projecteur orthogonal sur F. On note $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{S}(E),\ p \circ f = f \circ p\}$.
a) Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $f \in \mathcal{C}$ si et seulement si $f(F) \subset F$.
b) Soit $f \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que $f^2 = p$ si et seulement si $f = p$.

Analyse

1391. [CCINP] On note $E = \mathbb{C}[X]$ et, pour $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$, $\|P\| = \sup_{k \geqslant 0} |a_k|$.
a) Montrer que $\| \ \|$ est une norme de E.
b) Soit $b \in \mathbb{C}$. On souhaite étudier la continuité de l'application $f : P \in E \mapsto P(b) \in \mathbb{C}$.
i) Montrer que, si $|b| < 1$, alors f est continue.
ii) Étudier la continuité de f lorsque $|b| = 1$ à l'aide des polynômes $P_n = \sum_{k=0}^{n} \overline{b}^k X^k$.
iii) Montrer que, si $|b| > 1$, alors f n'est pas continue.

1392. [IMT] On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ la norme $\| \ \|_\infty$.
Si $f \in E$, on pose $u(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \inf(x,t) f(t) \mathrm{d}t$. Montrer que u est un endomorphisme continu et calculer sa norme subordonnée.

1393. [IMT] Soient $(u_n)_{n \geqslant 0}$, $(v_n)_{n \geqslant 0}$, $(w_n)_{n \geqslant 0}$ trois suites complexes.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{array}\right.$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur (u_0, v_0, w_0) pour que les trois suites convergent.

1394. [IMT] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$.
À quelles conditions sur a, b, c la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

1395. [IMT] On pose, pour $n \geqslant 3$, $u_n = \ln\left(\dfrac{n^4 - 2n^3 + 2n - 1}{n^4 - 2n^3}\right)$. Étudier la nature de la série de terme général u_n et calculer sa somme en cas de convergence.

1396. [IMT] Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sigma(3n) = 4n$, $\sigma(3n+1) = 4n+2$ et $\sigma(3n+2) = 2n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a) Montrer que σ est bijective.

b) On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = u_{\sigma(n)}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, et calculer leurs sommes.

1397. [IMT] ***a)*** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2(X+1)}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

i) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

ii) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n - \dfrac{1}{n}$.

iii) Déterminer la nature de la série de terme général $(n\,u_n - 1)$.

1398. [CCINP] On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in\,]0, \pi/2[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

b) Étudier la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.

c) Étudier la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

1399. [CCINP] On se donne deux réels α et β vérifiant $0 < \beta \leqslant 1 < \alpha$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta}$ et $\mu_n = \dfrac{R_n}{S_n}$.

a) Montrer que R_n est définie.

b) Donner un équivalent de R_n puis de S_n. Étudier la nature des séries $\sum \mu_n$ et $\sum (-1)^n \mu_n$.

1400. [IMT] Soient $\alpha \geqslant 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

a) Étudier la convergence de (u_n) en fonction de α.

b) Étudier la convergence de $\sum u_n$ en fonction de α.

1401. [IMT] Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, t^n \,\mathrm{d}t = 0$. Rappeler le théorème de Weierstrass. Prouver que f est nulle.

1402. [Dauphine] Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(t)\,|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t$.

1403. [IMT] Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$. Déterminer les limites de (S_n) et (T_n).

1404. [Navale] Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}}\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$.

1405. [CCINP] On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de I. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $J(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{t\,|\sin(t)|}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{(u+k\pi)\sin(u)}{(u+k\pi)^2+1}\,\mathrm{d}u$.

c) L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

1406. [CCINP] Soit $f \in \mathcal{C}^1(]0,1]\,,\mathbb{R})$ telle que $|f'(t)| \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$.

a) Déterminer un équivalent en 0^+ de $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que $x\,f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1407. [CCINP] Soit $f : x \in [0,1] \mapsto 2x(1-x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

a) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g que l'on précisera. La convergence est-elle uniforme ?

b) Soit $a \in \,]0,1/2[$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, 1-a]$.

1408. [IMT] On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}\cos^n(x)$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi[$ puis calculer f'.

1409. [IMT] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$. Domaine de définition de f ? Équivalent en 0^+ ?

1410. [CCINP] On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

a) Déterminer les domaines de définition et de continuité de f.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

1411. [CCINP] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2n-1}$. Déterminer le rayon de convergence de f.

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1}$ et en déduire $f(x)$.

1412. [IMT] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de f.
b) Donner une expression de $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Ind. Utiliser $I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q \, \mathrm{d}t$.

1413. [IMT] On pose $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) \, \mathrm{d}t$ pour tout $n \geqslant 0$.

a) Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$.
b) Calculer $a_n + a_{n+2}$ pour tout $n \geqslant 2$.
c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. On note f sa somme.
d) La fonction f admet-elle une limite en 1^- ?
e) Expliciter f.

1414. [IMT] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et donner une expression de $f(x)$.

1415. [IMT] Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)^n}$.

a) Montrer que les a_n sont bien définis.
b) Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$.
c) Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^n a_n$?
d) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

1416. [CCINP] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt^2) \, e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $F^{(k)}(0)$.
b) La fonction F est-elle développable en série entière en 0 ?

1417. [IMT] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e (\ln t)^n \, \mathrm{d}t$.

a) Déterminer la limite de (I_n).
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$. En déduire un équivalent de I_n.

c) Donner un développement asymptotique à deux termes de I_n

1418. [CCINP] ***a)*** Montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Étudier la monotonie de la suite (I_n) et montrer qu'elle converge.
c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \dfrac{4n-1}{4n} I_n$.
d) Étudier la convergence de la série $\sum \ln\left(\dfrac{4n-1}{4n}\right)$. En déduire la limite de I_n.
e) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^4)^n}$.
Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}^+$. Y a-t-il convergence uniforme ?
f) Déterminer la limite de la suite (I_n) à l'aide du théorème de convergence dominée.

1419. [IMT] Soit $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.
a) Vérifier la convergence de l'intégrale $I_n(\alpha)$.
b) Montrer la suite $(I_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ est convergente et préciser sa limite.
c) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} I_n(\alpha)$ est une série convergente et exprimer sa somme sous forme intégrale.

1420. [IMT] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$.
Justifier l'existence de I_n. Montrer que $I_n \sim n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$.

1421. [IMT] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de (I_n), puis un développement asymptotique à deux termes de I_n.

1422. [IMT] Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$.

1423. [IMT] On admet que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.
a) Existence et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^{2n} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Existence et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \cos(tz)\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1424. [IMT] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_x : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(xt)}{\mathrm{sh}(t)}$.

a) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
b) Montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 - x^2}$ pour tout $x \in D$.
c) Trouver un équivalent de la somme quand $x \to 1^-$.

1425. [IMT] On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et trouver une équation différentielle vérifiée par f.
b) Montrer que f est développable en série entière et donner son développement.

1426. [CCINP] ***a)*** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(xt)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
b) La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(xt)\,\mathrm{d}t$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
c) On admettra que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$. Établir une équation différentielle vérifiée par F. Donner une expression simple de F.

1427. [IMT] On admettra que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$. Préciser le domaine de définition de f et exprimer f à l'aide d'une équation différentielle.

1428. [IMT] Soit $\eta : x \in \left]-1, +\infty\right[\mapsto \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x\,\mathrm{d}t$. Montrer que η est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$.

1429. [IMT] Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

1430. [IMT] Soient $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-espace des fonctions paires (resp. impaires) de E.
a) Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
b) Déterminer les $f \in E$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = x + \cos(x)$.

1431. [IMT] On considère l'équation différentielle $xy' + y = \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^3}$.
a) Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^*$ puis sur $\mathbb{R}$.
b) Donner un développement limité d'une solution de l'équation différentielle à l'ordre 3 au voisinage de 0.

1432. [CCINP] ***a)*** Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.
i) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
ii) Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$ ».

b) On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
ii) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1433. [IMT] Soit $f : [a,b] \to E$ où E est un espace euclidien et $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $a < b$. On suppose f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|f'(c)\|(b-a)$.
Ind. On pourra introduire $\varphi : t \mapsto \langle f(t), f(b) - f(a)\rangle$.

1434. [IMT] Soient $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x,y \geqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant x+y \leqslant 1\}$ et $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy(1-x-y)$. Montrer que f atteint un maximum et un minimum sur K et les déterminer.

1435. [CCINP] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et f, g définies sur $\mathbb{R}^n$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \langle u(x), x\rangle$ et $g(x) = \|x\|^2 - 1$.
a) On pose $K = g^{-1}\{0\}$. Montrer que K est compact.
b) Montrer que $f_{|K}$ admet un maximum en $a \in K$.
c) Montrer que g est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.
d) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.
e) Montrer que a est un vecteur propre de u.

Probabilités

1436. [IMT] Est-il possible de truquer deux dés à six faces de sorte que la somme obtenue pour un double lancer suive une loi uniforme ?

1437. [IMT] Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire simultanément n boules et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Donner la loi de X. Calculer son espérance.

1438. [CCINP] Lors d'une compétition de saut en hauteur, un participant saute à plusieurs reprises et, à l'instant n, a une chance sur n de réussir son saut. S'il chute, la compétition s'arrête pour lui. On note X le nombre de sauts réussis. Quelle est la loi de X ? Existence et valeur de $\mathbf{E}(X)$ et de $\mathbf{V}(X)$?

1439. [IMT] On considère une pièce ayant une probabilité $p \in \,]0,1[$ d'obtenir pile et un dé équilibré à 6 faces. On note N le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pile, puis on lance N fois le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un unique 6 parmi les N lancers ?

1440. [IMT] Soit S la somme de N dés équilibrés à 6 faces, où N suit la loi uniforme sur $[\![1, 52]\!]$. Déterminer la probabilité des événements $(S = 1)$, $(S = 2)$, $(S = 3)$. Calculer l'espérance de S.

1441. [IMT] On joue des parties indépendantes d'un jeu où la probabilité de gagner est de $\frac{2}{3}$. Soit A_n l'événement « les parties n et $n+1$ sont gagnées, mais ce sont les premières à être gagnées consécutivement ». On note $p_n = \mathbf{P}(A_n)$.
a) Calculer p_1 et p_2.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$.
c) Exprimer p_n.

1442. [IMT] On dispose de N coffres. Avec probabilité p, on place dans l'un des coffres un trésor (le choix du coffre est effectué sous loi uniforme). Quelle est la probabilité que le N-ième coffre contienne un trésor sachant que les $N-1$ autres coffres sont vides ?

1443. [IMT] Soient $n, N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On considère N clients et n fournisseurs. Chaque client peut choisir individuellement un fournisseur. On note X_i le nombre de clients ayant choisi le fournisseur numéro i.
a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i.
b) On pose $Y = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$. Exprimer $\mathbf{E}(Y)$ de deux manières.
c) Calculer $\mathbf{E}(X_iX_j)$ et $\mathbf{Cov}(X_i, X_j)$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

1444. [IMT] Soient X et Y indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$. Calculer la loi de $S = X+Y$. Déterminer la loi de X sachant $(S=n)$.

1445. [Navale] Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$. On pose $X = \min(X_1,\dots,X_n)$. Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant k)$, en déduire la loi de X.

1446. [IMT] Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi est donnée par $\mathbf{P}((X,Y)=(j,k)) = \frac{j+k}{e2^{j+k}j!k!}$ pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\mathbf{E}\left(2^{X+Y}\right)$.

1447. [IMT] Soient X et Y deux variables indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$. On pose $D = X - Y$ et $I = \min(X,Y)$.
a) Rappeler l'espérance et la variance de X.
b) Déterminer la loi conjointe de (D,I).
c) Préciser les lois de D et I. Sont-elles indépendantes ?

1448. [IMT] Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois données par $\mathbf{P}(X_k = -k^\lambda) = \mathbf{P}(X_k = k^\lambda) = \frac{1}{2}$, où $\lambda \in \,]0,1/2[$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n}$.
a) Déterminer $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.
b) Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$, où $\alpha > 0$.

c) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|Y_n| > \alpha)$.

1449. [ISUP] Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance nulle et d'écart-type σ. Montrer que, pour tous $\lambda, \mu > 0$, $\mathbf{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{\sigma^2+\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}$ et $\mathbf{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\lambda^2+\sigma^2}$.

Autres Écoles – PSI

Algèbre

1450. [IMT] Soit le polynôme $P(X) = X^4 + \alpha X^3 + \beta X - 16$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles le polynôme P admet une racine triple.

1451. [Navale] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $D_A = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^T + M = \mathrm{Tr}(M)A\right\}$.
Caractériser le sous-espace D_A et déterminer sa dimension.

1452. [IMT] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$ et $AB = -BA$.
a) Montrer que A et B sont inversibles et diagonalisables.
b) Montrer que n est pair, puis que A et B sont semblables.

1453. [CCINP] Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = (a_{i,j} + x)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On note $D(x) = \det(A(x))$.
a) On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $D(x)$.
b) Montrer que $D(x)$ est un polynôme en x de degré au plus 1.
c) Dans le cas où $a_{i,i} = a$, $a_{i,j} = b$ pour $i > j$ et c pour $i < j$, calculer $\det(A)$.

1454. [ENSEA] On souhaite déterminer les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante : $\begin{cases} a_{n+1} = 3\,a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3\,b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3\,c_n \end{cases}$
a) Écrire le système sous la forme $X_{n+1} = AX_n$. En déduire X_n en fonction de A et de X_0.
b) Calculer, pour tout n, A^n.
c) Conclure.

1455. [IMT] Soient $a \in \mathbb{C}$ et $U \in \mathbb{C}[X]$ non nul. On pose $f : P \mapsto P + P(a)U$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Vect}(U)$.
c) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $U(a) = -1$. Que vaut le noyau de f sinon ?

1456. [CCINP] ***a)*** Énoncer le théorème du rang.
b) On considère l'énoncé suivant :
« Soient E et F deux espaces et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u injective $\Leftrightarrow$ u surjective. »
Quelles hypothèses suffit-il de rajouter pour que cet énoncé soit vrai ? Donner des contre-exemples pour illustrer l'importance de ces hypothèses.