

# Indécidabilité et physique: l'étonnante rencontre

Jean-Paul Delahaye

Le concept d'indécidabilité, bien connu en mathématiques, semble avoir aussi du sens pour certains problèmes en physique. Avec quelles implications concrètes ?

**e**n mathématiques, nombreuses sont les personnes qui considèrent que les théorèmes d'incomplétude de Kurt Gödel (1906-1976), et le développement subséquent de la théorie de la calculabilité, comptent parmi les avancées les plus importantes du vingtième siècle. Pourtant, dans un ouvrage paru en 2004, le célèbre physicien britannique Roger Penrose soulignait que, malgré l'étroite relation entre les mathématiques et la physique, ces développements n'avaient presque pas eu d'impact sur notre conception du monde physique. Il assurait cependant: « Personnellement, je suis convaincu que nous découvrirons que les questions de calculabilité sont d'une importance capitale dans les futures théories physiques. » L'histoire lui a donné raison: depuis vingt ans, des physiciennes et physiciens de plus en plus nombreux s'intéressent à ces questions.

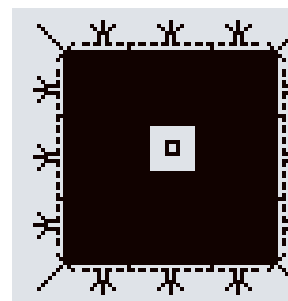
Notons que Kurt Gödel, dont les travaux sont à la racine de ce champ de recherche en mathématiques, semblait peu disposé à questionner l'impact de ses résultats en physique. Le physicien américain John Wheeler (1911-2008), relate en effet: « Un

jour, j'étais à l'Institut d'études avancées, et je me suis présenté au bureau de Kurt Gödel. C'était l'hiver, il était près d'un radiateur électrique, les jambes enveloppées dans une couverture. Je l'ai interrogé: "Professeur Gödel, quel lien voyez-vous entre votre théorème d'incomplétude et le principe d'incertitude de Heisenberg?" Ma question l'a mis en colère et il m'a demandé de sortir de son bureau. »

## Indécidable, incalculable

La théorie de l'indécidabilité fournit d'abord des résultats concernant les théories axiomatiques. Celles-ci sont, en quelque sorte, des systèmes de calcul, car on y fixe des règles parfaitement précises définissant ce qu'est une démonstration correcte: cela permet de « mécaniser » la vérification des démonstrations, qui sont donc ramenées à des calculs.

L'un de ces résultats indique que, dès qu'une théorie axiomatique non contradictoire est « suffisamment puissante », elle permet de formuler certains énoncés qu'elle est pourtant incapable de démontrer, et dont elle ne peut pas non plus démontrer la négation. Ces énoncés sont appelés des « indécidables de la théorie ». On parle d'« incomplétude », et même d'« incomplétabilité », de la théorie. Pour la théorie classique des ensembles, par exemple, l'axiome du choix est un indécidable: la théorie ne permet ni de le démontrer, ni de démontrer sa négation. Bien d'autres formules faisant appel à des infinis sont également des indécidables



L'AUTEUR



**Jean-Paul Delahaye**

professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

de cette théorie. En fait, toute théorie non contradictoire et capable de manipuler l'arithmétique élémentaire – nous appellerons cela une «théorie satisfaisante» – sera dans l'incapacité de démontrer certaines affirmations ne portant que sur les nombres entiers. En particulier, elle ne pourra jamais établir qu'elle est elle-même non contradictoire. Ces étonnants résultats, démontrés en 1931, constituent les célèbres théorèmes d'incomplétude de Kurt Gödel.

Il y a par ailleurs des résultats concernant les méthodes algorithmiques, c'est-à-dire programmables

sur ordinateur. Ces résultats indiquent que certaines fonctions  $F$ , pourtant parfaitement définies, ne pourront jamais être programmées – autrement dit, on ne pourra jamais écrire un programme informatique qui, pour toute entrée valide  $d$ , calcule la valeur de  $F(d)$ . On dit que la fonction  $F$  est «incalculable», et on parle alors d'«indécidabilité algorithmique». On peut par exemple définir la fonction  $F$  qui associe à tout programme informatique  $Pr$  la valeur 0 si  $Pr$  finit par arriver au bout de son calcul, et la valeur 1 si au contraire  $Pr$  ne s'arrête jamais de calculer. Cette fonction est incalculable.

### 1. Indécidabilité du jeu de la vie

Dans le jeu de la vie, inventé en 1970 par le mathématicien britannique John Horton Conway (1937-2020), tout se passe sur une grille carrée infinie dont chaque case (ou «cellule») est soit vivante, soit morte. Le temps se déroule par pas discrets appelés «étapes» ou «générations». À l'étape 0, toutes les cellules sont mortes sauf un nombre fini d'entre elles. Lorsqu'on passe de l'étape  $n$  à l'étape  $n+1$ , chaque case  $C$  change ou non d'état en fonction de la configuration des huit cases qui l'entourent :

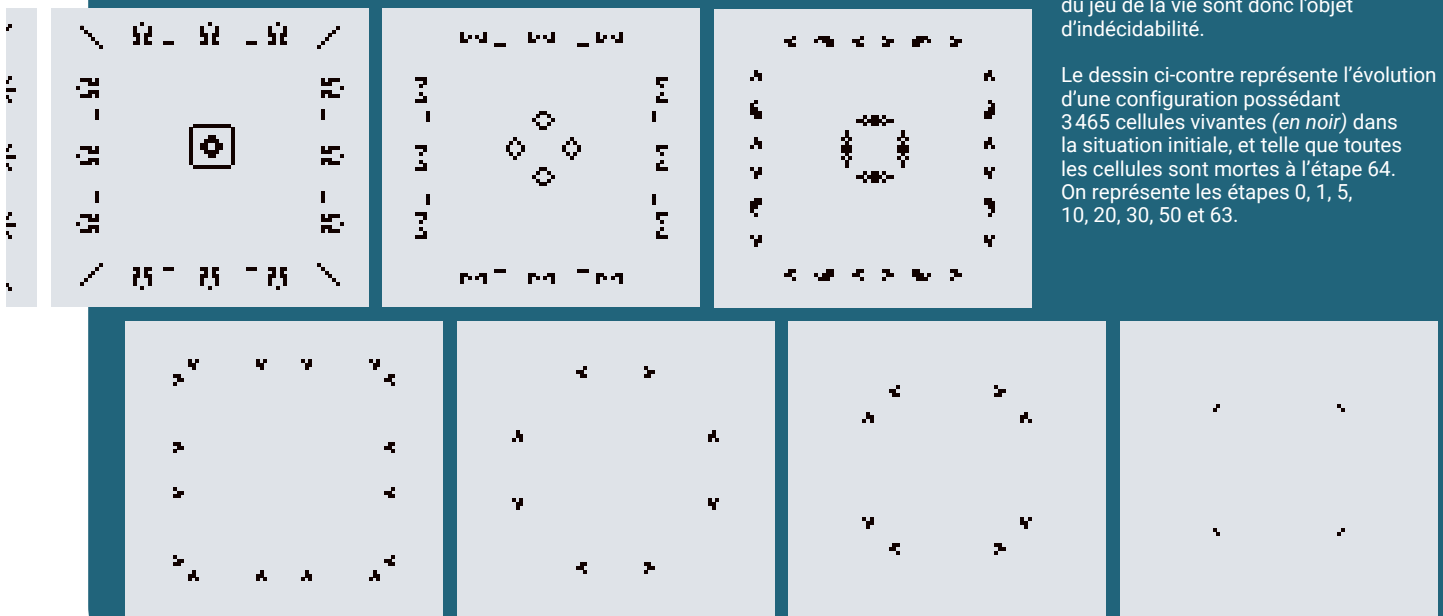
- Si  $C$  est morte à l'étape  $n$  et que trois des huit cases qui l'entourent sont vivantes à l'étape  $n$ ,  $C$  devient vivante à l'étape  $n+1$ . On dit que la règle est «naissance si 3».
- Si  $C$  est vivante à l'étape  $n$  et deux ou trois des huit cases qui l'entourent sont vivantes à l'étape  $n$ ,  $C$  reste vivante à l'étape  $n+1$ . On dit «survie si 2 ou 3».
- Dans tous les autres cas,  $C$  est morte à l'étape  $n+1$ .

L'étude de ce jeu a produit des résultats extraordinaires. En particulier, il existe

des configurations de départ du jeu qui sont équivalentes à des calculateurs universels, c'est-à-dire des systèmes capables de simuler toute fonction calculable par algorithme.

Conséquence de cette universalité du jeu : le devenir ultime d'une configuration est indécidable. Autrement dit, il n'existe pas d'algorithme qui, partant de n'importe quelle condition initiale, indique si le jeu de la vie aboutit à une configuration où toutes les cases sont mortes, ou si au contraire la grille continue à évoluer indéfiniment. Les dispositifs physiques simulant les règles du jeu de la vie sont donc l'objet d'indécidabilité.

Le dessin ci-contre représente l'évolution d'une configuration possédant 3465 cellules vivantes (*en noir*) dans la situation initiale, et telle que toutes les cellules sont mortes à l'étape 64. On représente les étapes 0, 1, 5, 10, 20, 30, 50 et 63.



Par conséquent, on dit que la question de «l'arrêt d'un programme» est algorithmiquement indécidable. Historiquement, c'est le premier problème pour lequel cette propriété a été démontrée – ce résultat se déduit immédiatement des travaux d'Alan Turing en 1936.

Les résultats concernant les théories axiomatiques et ceux portant sur les méthodes algorithmiques sont, en fait, liés l'un à l'autre: si un problème posé par une fonction  $F$  est algorithmiquement indécidable – c'est-à-dire si la fonction  $F$  est incalculable – alors pour toute théorie axiomatique satisfaisante  $Ax$ , l'énoncé « $F(d) = r$ » (où  $r$  est bien la valeur associée à  $d$  par la fonction  $F$ ) est indécidable dans  $Ax$  pour une infinité de valeurs de  $d$ .

Si l'on applique ce résultat en prenant pour  $F$  la fonction définie ci-dessus, qui indique l'arrêt ou non d'un programme, on obtient que pour toute théorie axiomatique satisfaisante  $Ax$ , il existe une infinité de programmes dont  $Ax$  est incapable de démontrer s'ils s'arrêtent ou non. Or, quand un programme s'arrête, il est possible de le démontrer dans toute théorie axiomatique satisfaisante  $Ax$ , car l'affirmation de l'arrêt se ramène à des manipulations arithmétiques élémentaires. Il en résulte que pour toute théorie axiomatique satisfaisante  $Ax$ , il existe une infinité de programmes qui ne s'arrêtent jamais et

## Tout résultat d'indécidabilité algorithmique affirme une impossibilité concernant la classe des ordinateurs dont nous disposons aujourd'hui

dont l'énoncé arithmétique affirmant ce non-arrêt est indécidable par  $Ax$ .

### Première interprétation physique

De nombreux résultats mathématiques s'interprètent directement au sein du monde physique, et c'est le cas pour certains résultats d'indécidabilité. Considérons par exemple l'indécidabilité du problème de l'arrêt. Les ordinateurs que nous construisons sont des objets du monde physique, dont on peut considérer qu'ils sont une matérialisation du concept mathématique de machine de Turing universelle. Cela veut dire qu'un ordinateur du monde physique *Ordi* étant fixé ainsi qu'une fonction  $F$ , il y a équivalence entre «il existe un programme pour *Ordi* qui calcule  $F$ » et « $F$  est calculable par algorithme au sens mathématique». En conséquence si une fonction  $F$  est incalculable (ce qui est une affirmation mathématique) alors cela signifie qu'aucun ordinateur dans le monde physique ne peut calculer la bonne valeur  $F(d)$  pour toute donnée  $d$ . L'indécidabilité logique se traduit donc en une impossibilité physique pour nos ordinateurs.

La question de savoir si nous pourrions un jour construire des ordinateurs qui échapperont à cette indécidabilité algorithmique est délicate et fait l'objet de ce qu'on nomme la «thèse de Church-Turing physique». Celle-ci affirme le contraire: on ne pourra jamais construire de dispositifs physiques capables de calculer des fonctions non calculables par algorithme. Cette thèse affirme de plus que ce que peuvent calculer les dispositifs physiques, quels qu'ils soient, correspond exactement à ce qui est calculable par algorithme au sens mathématique. Si l'on accepte cette thèse, ce qui est assez fréquent en logique, alors tout résultat d'indécidabilité algorithmique devient un résultat affirmant une impossibilité physique absolue. Autrement dit, l'indécidabilité mathématique a pour conséquence que certaines tâches pourtant parfaitement définies ne seront

## 2. Axiomatiser la physique

Dans cet article, on s'interroge sur le sens que peut avoir la notion d'incomplétude en physique. Cette question ne peut se poser que si les physiciennes et physiciens définissent, comme en mathématiques, les théories axiomatiques sur lesquelles ils et elles s'appuient. Or ce n'est pas souvent le cas.

C'était pourtant le dessein du célèbre mathématicien David Hilbert: dans sa liste de 23 problèmes énoncée en 1900 à la manière d'un programme de recherche pour le siècle à venir, il évoque explicitement l'enjeu de «traiter de la même manière [qu'en mathématiques], au moyen d'axiomes, les sciences physiques».

Les travaux menés autour de ce «sixième problème de Hilbert» ont

permis de lier certains domaines de la physique à des structures mathématiques précises. Ces liens se présentent en général sous la forme du plongement d'une théorie physique dans une théorie mathématique. Cela conduit finalement à faire reposer l'axiomatisation de la physique sur les systèmes axiomatiques utilisés en mathématiques. L'usage des nombres réels et d'espaces multidimensionnels contraint le cadre mathématique envisagé à être très riche, et c'est donc la théorie des ensembles qui semble le fondement le plus naturel pour axiomatiser pleinement la physique. Par conséquent, ces axiomatisations sont soumises aux théorèmes d'incomplétude de Kurt Gödel. En ce sens, l'incomplétude concerne bel et bien la physique.

jamais exécutables par des dispositifs physiques. Notons d'ailleurs que même si l'on n'adopte pas la thèse de Church-Turing physique, tout résultat d'indécidabilité algorithmique affirme une impossibilité concernant la classe des ordinateurs dont nous disposons à l'heure actuelle, ce qui est déjà très concret.

On peut par ailleurs remarquer que, sauf exception, une théorie physique fait usage de l'arithmétique élémentaire ou même des nombres réels. Si l'on cherche, par exemple, à axiomatiser complètement la mécanique newtonienne, on s'appuiera nécessairement sur les notions de nombres entiers et réels. Il est par conséquent difficile d'imaginer qu'on la formalise avec un système d'axiomes qui ne soit pas satisfaisant au sens défini plus haut (c'est-à-dire non contradictoire et capable d'arithmétique élémentaire). De telles formalisations de domaines de la physique sont donc sujettes aux théorèmes d'incomplétude de Kurt Gödel : elles peuvent formuler des énoncés qu'elles ne peuvent pas démontrer et dont elles ne peuvent pas non plus démontrer la négation. En ce sens, l'incomplétude concerne donc directement la physique (*voir l'encadré 2*).

### Karl Popper, Freeman Dyson, Stephen Hawking

Le philosophe des sciences Karl Popper (1902-1994) est célèbre pour sa thèse selon laquelle une connaissance ne peut être considérée comme scientifique que si elle est falsifiable, c'est-à-dire s'il existe un protocole expérimental qui permettrait de la démontrer fautive le cas échéant. Il est aussi l'un des tout premiers, à avoir défendu, dès 1950, l'idée que les résultats d'incomplétude de Kurt Gödel ont un sens physique. Il s'intéressait en effet à l'idée qu'une machine physique ne peut pas tout prévoir : les résultats de Kurt Gödel lui ont fourni l'exemple d'une machine de Turing universelle, qui ne peut pas prédire son propre comportement. En effet aucun des programmes d'une telle machine ne peut prédire pour *tous* ses programmes s'ils s'arrêtent ou pas : c'est bel et bien une forme d'impossibilité de prédire son propre comportement.

Le physicien Freeman Dyson (1923-2020), à qui l'on doit un concept fascinant de science-fiction appelé « sphère de Dyson », a aussi défendu cette idée d'une application directe des théorèmes d'incomplétude à la physique. Dans un livre de 2006, il écrivait : « Les lois de la physique constituent un ensemble fini de règles, incluant les règles mathématiques, de sorte que les théorèmes de Gödel s'y appliquent. Ce théorème implique que même dans le domaine

### 3. Modèles infinis, réalité finie ?

L'indécidabilité telle qu'abordée dans cet article ne porte pas sur le monde physique lui-même mais sur ses modélisations, les théories physiques déployées pour le décrire. De simples considérations sur la finitude illustrent bien cette remarque.

On sait en effet que toute fonction  $F$  d'un ensemble fini vers un autre est calculable par algorithme. En effet, en notant  $d_1, \dots, d_n$  les entrées que peut accepter une telle fonction  $F$  et en notant  $r_i$  la valeur de  $F(d_i)$  pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ , alors dans tout langage de programmation on peut écrire la liste finie d'instructions : « si  $d = d_1$  alors  $r := r_1$  ; si  $d = d_2$  alors  $r := r_2$  ; ... ; si  $d = d_n$  alors  $r := r_n$  ». Cela permet bien de calculer algorithmiquement la fonction  $F$ .

Pour des raisons analogues, toute théorie axiomatique portant sur un nombre fini d'objets mathématiques

auxquels on attribue des propriétés ne pouvant prendre qu'un nombre fini de valeurs peut être rendue décidable.

Il ne faut donc jamais l'oublier : l'indécidabilité ne peut concerner que des problèmes avec des paramètres pouvant prendre une infinité de valeurs différentes.

Or il n'est pas exclu qu'à un niveau de précision suffisant il n'y ait pas de continuité du temps ou de l'espace. Par ailleurs, certains physiciens et physiciennes étudient l'hypothèse que l'espace soit de volume fini. Le cas échéant, aucune indécidabilité ni incomplétude ne peut concerner le monde physique lui-même, et c'est parce que les modèles théoriques introduisent un infini artificiel qu'on y rencontre ces curiosités induites par la logique mathématique.

des équations fondamentales de la physique, nos connaissances seront toujours incomplètes.»

Le médiatique cosmologiste britannique Stephen Hawking (1942-2018) défendait lui aussi, dans un sens très général, l'idée que les théorèmes de Gödel concernaient de manière directe les théories physiques : « Quel rapport entre le théorème de Gödel et la possibilité de formuler une théorie de l'Univers à l'aide d'un nombre fini de principes ? Un lien est évident. Selon la philosophie positiviste des sciences, une théorie physique est un modèle mathématique. Ainsi, s'il existe des résultats mathématiques impossibles à prouver, il existe des comportements physiques impossibles à prévoir. »

Ces considérations, qu'on pourrait juger un peu trop générales, ont été précisées dans un certain nombre de domaines. Un article publié en 2025 par une équipe menée par Álvaro Perales Eceiza, de l'université d'Alcalá, en Espagne, fait la synthèse des nombreux travaux qui, depuis une vingtaine d'années, démontrent des résultats d'indécidabilité physique. Ces résultats balayent, notamment, les domaines de la théorie quantique des champs (essentielle pour décrire ce qui se passe dans des accélérateurs de particules), la gravité quantique (qui

tente d'unifier la mécanique quantique et la relativité générale), les systèmes dynamiques discrets (dont on sait aujourd'hui que l'évolution est indécidable), le modèle d'Ising (qui sert en particulier à décrire l'aimantation des matériaux ferromagnétiques) ou encore la physique quantique à plusieurs corps. Pour démontrer tous ces résultats, la méthode consiste

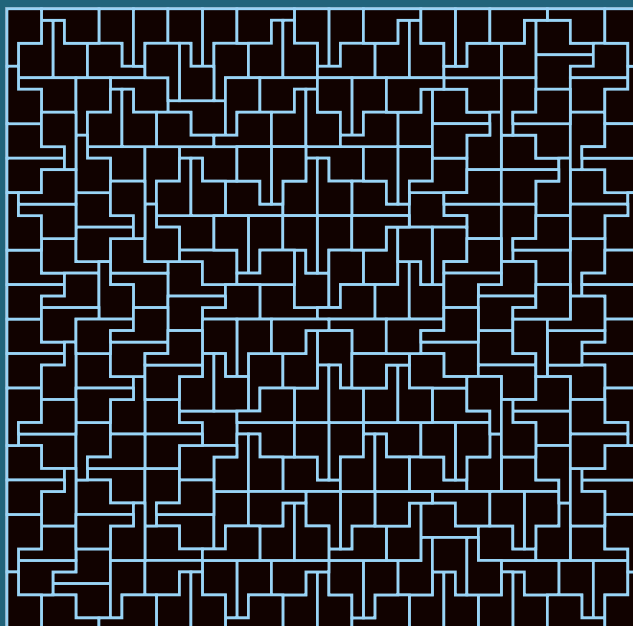
à exploiter le contenu de la théorie pour créer des dispositifs opérant des mouvements qui ont une interprétation mathématique sur le plan du calcul, et dont on sait qu'ils sont impossibles (car ils correspondraient à des indécidables).

Toute cette recherche conduit à se demander si ces résultats limitent gravement ce qu'on peut

#### 4. Indécidabilité et complexité

Il n'est pas évident que les résultats d'indécidabilité en physique fournissent des informations concrètes sur le monde réel, car ces résultats requièrent toujours de l'infini – une mémoire infinie dans le cas des ordinateurs universels, des axiomes nécessitant l'existence d'une infinité d'éléments, etc. On dispose cependant de résultats permettant de contourner cette difficulté, car il est presque toujours possible d'associer à un problème indécidable impliquant l'infini un problème fini qui ne peut être résolu qu'à l'aide d'un nombre de calculs qui augmente déraisonnablement avec la taille des données. L'indécidabilité théorique se traduit alors en une impossibilité pratique de résoudre certains problèmes finis.

Le problème des pavages du plan par des polyominos est un bon exemple de cette situation. On appelle « polyominos » les formes planes d'un seul tenant qu'on obtient en collant par leurs côtés un nombre fini de carrés de même taille. Étant donné un ensemble fini de polyominos, on peut se demander si, en utilisant des copies de ces formes, on peut recouvrir parfaitement le plan, sans chevauchement entre pièces et sans laisser de trous. Ce problème est algorithmiquement indécidable. Mais une version finie consiste à déterminer si cet ensemble fini de polyominos peut être utilisé pour paver un carré de côté  $n$ , où  $n$  est un nombre entier. Pour une valeur de  $n$  fixée, on peut le résoudre en essayant une à une toutes



Pavage d'un carré par un polyomino

les combinaisons de polyominos envisageables – qui sont en nombre fini.

Il se trouve néanmoins que cette version finie du problème est NP-difficile, c'est-à-dire qu'on ne connaît que des algorithmes de résolution dont le temps d'exécution augmente plus vite, quand  $n$  croît, que tout polynôme en  $n$ . En pratique, aujourd'hui, on considère qu'on

ne peut pas résoudre algorithmiquement des problèmes NP-difficiles, sauf pour de petites valeurs de  $n$ . La figure ci-dessus illustre assez clairement la difficulté qu'il peut y avoir à déterminer si un ensemble fini de formes (ici, une seule forme) pave un carré : le pavage présenté ici n'est pas facile à trouver !

Un autre exemple de manifestation de l'indécidabilité sous la forme de difficultés calculatoires concerne la logique élémentaire. Le calcul des prédicats du premier ordre est un système formel qui modélise le raisonnement mathématique. Il sert en particulier à formuler les axiomes de l'arithmétique élémentaire, ou encore la théorie des ensembles. Or ce calcul des

prédicats du premier ordre autorise qu'on manipule des variables pouvant prendre une infinité de valeurs – quand on écrit des énoncés commençant par « pour tout  $x$  », par exemple. En raison de la présence de cet infini, le calcul des prédicats du premier ordre est algorithmiquement indécidable : il n'existe pas d'algorithme indiquant, pour toute formule  $F$  de ce calcul, si  $F$  est

contradictoire ou non. Or une version finie du calcul des prédicats du premier ordre est le calcul propositionnel, c'est-à-dire l'étude des formules du type «  $(C \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \text{ ou } C))$  ». En 1971, Stephen Cook et Leonid Levin, indépendamment l'un de l'autre, ont démontré que le problème consistant à déterminer si une formule de longueur  $n$  est contradictoire ou non était NP-difficile.

attendre des recherches en physique. Pour le cosmologiste britannique John Barrow (1952-2020), «il n'y a aucune raison de s'attendre que l'incomplétude de Kurt Gödel handicape la recherche d'une description des lois de la nature». Il précise toutefois que, d'autre part, ces résultats doivent nous amener à attendre des «limites au sujet de ce que nous pouvons prédire par l'utilisation de ces lois».

Ainsi, Karl Popper, Freeman Dyson, Stephen Hawking et John Barrow convergent pour affirmer que l'indécidabilité concerne bel et bien la physique et en limite le pouvoir de prédiction. Cependant, on peut questionner le sens profond de ces notions d'indécidabilité et d'incomplétude en physique. Il faut en effet avoir conscience que ces dernières ne portent pas sur le monde physique lui-même, mais sur les représentations qu'en proposent les théories physiques, dont Álvaro Perales Eceiza et ses coauteurs rappellent qu'elles ne sont que des «modèles mathématiques idéalisés» (voir l'encadré 3).

### De l'infini indécidable au fini complexe

Il existe par ailleurs des liens entre indécidabilité et «difficultés calculatoires», qu'on commence aujourd'hui à bien comprendre, notamment grâce aux travaux signés en 2023 par une équipe menée par Andreas Klingler, alors chercheur à l'université d'Innsbruck, en Autriche.

Une des branches de la théorie de la calculabilité s'intéresse à la quantité de calculs qu'il faut mettre en œuvre pour accomplir une tâche finie. Par exemple, pour trier par ordre croissant une liste de  $n$  nombres entiers, les algorithmes les plus simples travaillent en opérant environ  $n^2/2$  comparaisons entre deux entiers. En s'y prenant mieux, on peut procéder à ce tri en effectuant environ  $n \times \log(n)$  comparaisons, ce qui est beaucoup plus rapide.

Ce type de résultat est très important en pratique. Certains problèmes, tels celui de déterminer si une formule booléenne comme  $((A \text{ ou } B) \text{ et } D)$  implique  $(D \text{ ou } (A \text{ et } B))$  est toujours vraie, sont particulièrement difficiles. Toutes les méthodes qu'on connaît pour les résoudre exigent un nombre de calculs qui augmente exponentiellement en fonction de la longueur de la formule. La classe des «problèmes NP-difficiles» désigne justement ces problèmes dont on pense qu'ils ne peuvent pas être résolus «rapidement», c'est-à-dire en exécutant un nombre d'opérations borné par un polynôme en  $n$ , où  $n$  est la longueur de la donnée sur laquelle porte le problème. En pratique, pour un problème appartenant à cette classe, dès que la longueur des données

sera trop grande, il sera impossible d'obtenir une résolution en un temps raisonnable, même en utilisant les plus puissants de nos ordinateurs actuels.

Or il existe de nombreux cas où l'on sait établir un lien entre le caractère indécidable d'un problème infini et le caractère NP-difficile d'une version finie

## Si un problème de physique est indécidable, alors il est impossible, en pratique, de résoudre une version finie de ce problème

de ce problème. Dire qu'un problème de physique est indécidable revient alors à dire qu'il est impossible de résoudre, en pratique, une version finie de ce problème, car cela nécessiterait de trop grandes quantités de calcul. L'indécidabilité infinie se traduit alors par une impossibilité matérielle de traiter un problème fini (voir l'encadré 4).

Les résultats d'indécidabilité, qui ont pleinement leur place en mathématiques, sont donc délicats à transférer dans le champ de la physique, car ils portent davantage sur les modèles déployés par les spécialistes que sur la réalité physique elle-même. Néanmoins, moyennant une étape de reformulation en termes de complexité calculatoire, l'indécidabilité en physique possède souvent un sens concret, dont il est utile d'avoir la connaissance, car elle indique la possibilité ou non de résoudre, en pratique, certains problèmes calculatoires. ■

#### BIBLIOGRAPHIE

- A. Perales-Eceiza et al.**, Undecidability in physics: A review, *Physics Reports*, 2025.
- J. P. Delahaye**, *Aux frontières des mathématiques, Kurt Gödel et l'incomplétude*, Dunod, 2025.
- M. Faizal et al.**, Consequences of Gödel theorems on third quantized theories like string field theory and group field theory, *Nuclear Physics B*, 2025.
- A. Klingler et al.**, Many bounded versions of undecidable problems are NP-hard, *SciPost Physics*, 2023.
- Y. Tachikawa**, Undecidable problems in quantum field theory, *International Journal of Theoretical Physics*, 2023.
- P. Rendell**, *Turing machine universality of the game of life*, Springer, 2016.