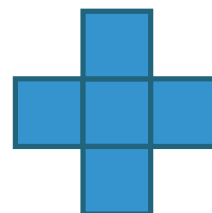


Inépuisables polyominos

Jean-Paul Delahaye



Simple en apparence, ces formes constituées de carrés accolés ont engendré un foisonnement de jeux, mais aussi d'intéressants problèmes mathématiques.

Les polyominos – nom parfois orthographié « polyminos » – sont les formes planes d'un seul tenant, avec ou sans trous, qu'on obtient en collant par leurs côtés un nombre fini de carrés de même taille. Il y a par exemple douze polyominos constitués de cinq carrés, appelés « pentaminos » (voir l'encadré 1). Les douze pentaminos sont énumérés et représentés dès 1907 par Henry Dudeney dans son célèbre livre d'énigmes mathématiques *The Canterbury Puzzles* (paru en français sous le titre *Les Énigmes de Canterbury*). Entre 1937 et 1957, de nombreux résultats concernant les polyominos sont publiés dans le journal *Fairy Chess Review*. Ce n'est cependant qu'en 1953 que le mathématicien américain Solomon Golomb propose ce nom de « polyomino », et c'est surtout la rubrique de Martin Gardner de novembre 1960 dans la revue *Scientific American* qui popularise les problèmes à leur sujet. Plusieurs livres leur ont depuis été consacrés, dont un ouvrage signé Solomon Golomb paru en 1965 puis complété en 1996.

Dénombrer les polyominos constitués d'un nombre donné de carrés est un défi qui a suscité des travaux approfondis. En dépit de ces efforts, on ne connaît à l'heure actuelle aucune formule générale donnant cette quantité. On sait seulement dénombrer les polyominos constitués d'un petit nombre



de carrés: il y a un seul domino (constitué de deux carrés), deux triominos (constitués de trois carrés), cinq tétraminos (constitués de quatre carrés), douze pentaminos (constitués de cinq carrés), trente-cinq hexaminos (constitués de six carrés).

Dénombrements

Pour aller plus loin dans cette énumération, il faut préciser ce que l'on considère comme des polyominos équivalents, qu'il ne faut donc pas compter plusieurs fois (voir le tableau page 72)

- On peut considérer, ce qui est l'option la plus courante, que deux polyominos sont identiques si l'un s'obtient à partir de l'autre en opérant une ou plusieurs fois une rotation et/ou une symétrie par rapport à une droite (un retournement). Avec cette convention, on parle de « polyominos libres ». C'est implicitement cette notion que nous avons utilisée dans le début de ce texte.

- Si l'on s'interdit les retournements, on parle alors de « polyominos unilatéraux » (*one-sided*, en anglais). Il y a 18 pentaminos unilatéraux (pour seulement 12 pentaminos libres), car les pentaminos *F*, *L*, *N*, *P*, *Y* et *Z* se dédoublent.

- Si l'on s'interdit aussi les rotations, on parle de « polyominos fixes ». Il y a 63 pentaminos fixes.

- Même si ce n'est pas le cas dans cet article, certaines conventions rejettent les formes avec des trous, qui ne sont alors pas considérées comme des polyominos.

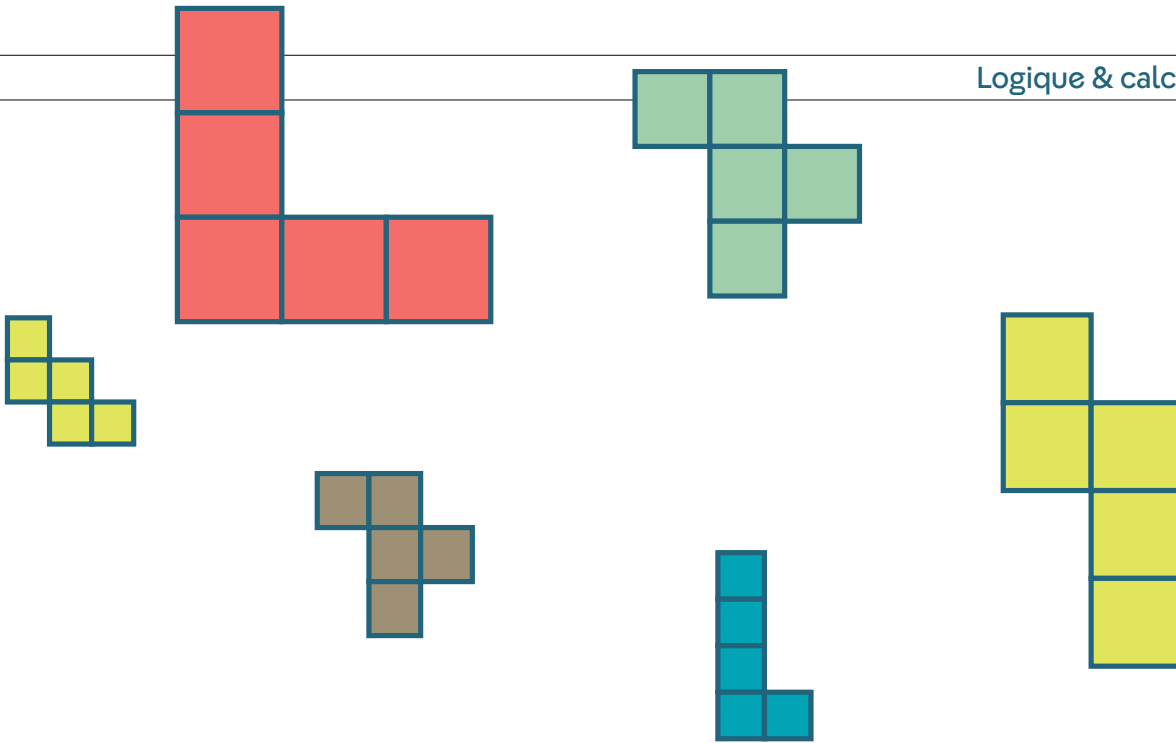
Chose étonnante: concevoir et mettre au point de bons algorithmes pour dénombrer les polyominos est un problème difficile, qui a donné lieu à toute une série d'articles mathématiques, dont certains ont paru très récemment. Mais même les meilleures

L'AUTEUR



Jean-Paul Delahaye

professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)



méthodes se heurtent rapidement au temps de calcul ou à l'espace mémoire nécessaires: les records de décompte sont donc, aujourd'hui encore, limités aux petites valeurs pour le nombre de carrés constituant les polyomino.

On peut en particulier citer l'article du mathématicien canadien Hugh Redelmeier paru en 1981 dans la prestigieuse revue *Discrete Mathematics*, qui a été amélioré en 2024 par Gill Barequet et Gil Ben-Shachar. Dans ce dernier papier, les deux chercheurs parviennent à dénombrer les polyomino fixes constitués de 70 carrés. Il y en a: 18500792645885711270652890811942343400814

Concernant les polyomino unilatéraux, John Mason est parvenu à démontrer, en 2023, que ceux constitués de 50 carrés sont au nombre de: 4 300365220322020871043392169

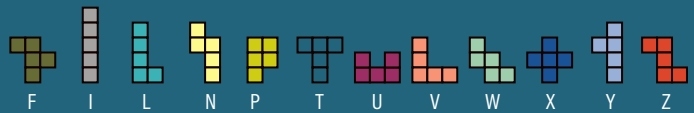
Formules approchées

La recherche de formules approchées pour dénombrer les polyomino constitués de n carrés, pour n un entier quelconque, est une question mathématique véritablement délicate. On sait aujourd'hui que le nombre A_n de polyomino fixes constitués de n carrés croît exponentiellement avec n , c'est-à-dire qu'il croît comme r^n , avec r une certaine constante appelée « constante des polyomino » ou parfois « constante de David Klarner », en hommage au premier à l'avoir définie. Les derniers résultats de recherche au sujet de cette constante indiquent que $4,00253 \leq r \leq 4,5252$.

Quand on sait approximer le nombre de polyomino fixes constitués d'un grand nombre de carrés, on peut approximer le nombre de polyomino libres constitués du même nombre de carrés. En effet, quand

1. Pentaminos

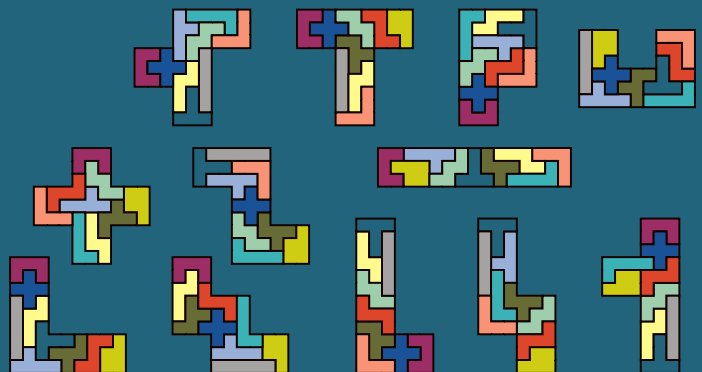
Les pentaminos sont les polyomino constitués de cinq carrés accolés par leurs côtés. Il y en a douze, et aucun d'entre eux n'a de trou. On les nomme avec les lettres de l'alphabet en s'inspirant de leur forme (voir ci-dessous).



Un puzzle très populaire consiste à assembler les douze pentaminos libres pour former un rectangle. C'est possible pour les rectangles de tailles 6×10 , 5×12 , 4×15 et 3×20 . Pour le rectangle de taille 6×10 , il y a 2339 assemblages différents qui conviennent. Pour le rectangle de taille 5×12 , il y a 1010 solutions. Il y en a 368 pour le rectangle de taille 4×15 , et deux solutions pour le rectangle 3×20 (voir ci-dessous pour ce dernier cas).



Un problème moins classique consiste à recouvrir par 9 pentaminos différents chaque pentamino dont la taille des carrés a été multipliée par trois (voir ci-dessous).



n	Nom	Forme				
		Libre			Unilatérale	Fixe
		Total	Avec trous	Sans trous		
1	Monomino	1	0	1	1	1
2	Domino	1	0	1	1	2
3	Triomino	2	0	2	2	6
4	Tétramino	5	0	5	7	19
5	Pentamino	12	0	12	18	63
6	Hexamino	35	0	35	60	216
7	Heptamino	108	1	107	196	760
8	Octamino	369	6	363	704	2725
9	Ennéamino	1285	37	1248	2500	9910
10	Décamino	4 655	195	4 460	9 189	36 446
11	Undécamino	17 073	979	16 094	33 896	135 268
12	Dodécamino	63 600	4 663	58 937	126 759	505 861

Dénombrement des polyominos constitués de n carrés, pour les 12 premières valeurs entières de n . On distingue les polyominos libres (pour lesquels on ne compte pas deux fois des polyominos dont l'un est obtenu à partir de l'autre par rotations et/ou retournement), les polyominos unilatéraux (pour lesquels on compte deux fois des polyominos obtenus l'un à partir de l'autre par retournement, mais une seule fois ceux obtenus l'un à partir de l'autre par rotation) et les polyominos fixes (pour lesquels on compte deux fois deux polyominos obtenus l'un à partir de l'autre par rotation ou par retournement).

le nombre de carrés constituant un polyomino augmente, il devient de plus en plus rare que cette forme possède des symétries. Ainsi, à chaque polyomino libre P constitué d'un grand nombre de carrés, on peut presque toujours associer 8 polyominos fixes, tous différents, obtenus en faisant tourner P de 90° , 180° et 270° et en considérant les retournements.

Concernant la prise en compte ou non des formes contenant des trous, on a seulement pu formuler la conjecture que, lorsque n tend vers l'infini, la proportion de polyominos (libres, unilatéraux ou fixes) sans trous tend vers 0.

Pavages monotuiles

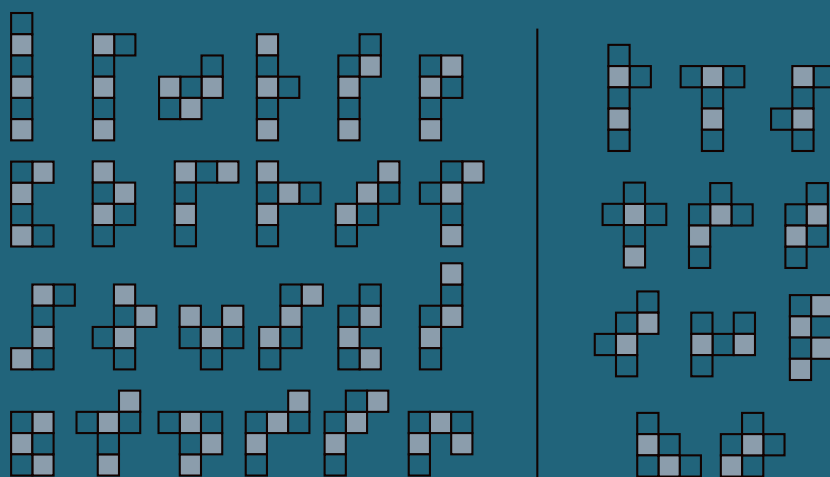
Il existe une multitude de questions concernant les problèmes de pavages utilisant des copies d'un unique polyomino. Parmi les plus simples, on peut citer celui consistant à trouver les 56 polyominos libres constitués de 6 carrés ou moins, et à montrer que chacun d'eux pave le plan. Plus difficile: on peut rechercher les 4 polyominos constitués de 7 carrés qui ne pavent pas le plan.

En 1968, David Klarner introduit la notion «d'ordre d'un polyomino». Pour k un nombre entier, on dit qu'un polyomino P est d'ordre k si et seulement

2. Pavages par des hexaminos

Si l'on peut paver des rectangles avec des pentaminos libres, étrangement il est impossible de constituer un rectangle sans trous ni chevauchement avec des hexaminos (les polyominos constitués de six carrés). Voici l'astucieux raisonnement qui le démontre.

Quand on place les 35 hexaminos sur un damier avec des cases blanches et noires, 11 d'entre eux exactement recouvrent un nombre pair de cases noires (soit 2 cases noires et 4 blanches, soit 4 cases noires et 2 blanches). Ce sont ceux regroupés dans la colonne de droite dans la figure ci-contre. Les 24 autres recouvrent exactement 3 cases blanches et 3 noires – ce sont ceux regroupés à gauche dans la figure ci-contre. En disposant les 35 hexaminos sur un grand damier, ils couvriront donc un nombre pair de cases noires. Les rectangles de taille $35 \times 6 = 210$ et qui par ailleurs sont assez larges pour contenir des hexaminos sont les deux rectangles de tailles respectivement 6×35 et 3×70 . Or, quand on place l'un de ces rectangles sur un grand damier, il recouvre exactement 105 cases noires et 105 blanches. C'est incompatible avec l'affirmation précédente: on ne peut donc pas recouvrir ce rectangle en combinant les 35 hexaminos.



si k est le nombre minimum de copies de P permettant de paver parfaitement un rectangle. Dans cette définition, on s'autorise les rotations, les retournements et bien sûr les translations de P . Si aucun rectangle ne peut être obtenu en assemblant des copies de P on dit que l'ordre du polyomino P est non défini.

Un polyomino rectangulaire est toujours d'ordre 1. Il n'est pas difficile de trouver des polyominos d'ordres 2 et 4. En revanche il n'existe pas de polyomino d'ordre 3 – c'est un résultat démontré en 1992 par Ian Stewart et Albert Wormstein. Autrement dit: si exactement trois copies d'un polyomino P pavent un rectangle, c'est que P lui-même est un rectangle (donc que P est d'ordre 1). Le résultat a ensuite été généralisé par Samuel Maltby, qui a démontré qu'un rectangle ne peut être découpé en trois morceaux superposables M que si M est un rectangle.

La recherche de polyominos ayant un ordre élevé a donné de magnifiques résultats (voir la figure ci-contre). On connaît aujourd'hui des polyominos d'ordre 8, 10, 50, 60, 76, 92, 96, 138, 180, 246, 270, 360, 396 ou encore 468. Chacun suggère un difficile casse-tête totalement inattendu – comme par exemple celui consistant à paver le rectangle 5×10 avec dix copies du pentamino Y .

Polyominos totalement concaves

On dit qu'un polyomino est «totalement concave» si et seulement si, en prenant l'intersection de P avec une ligne ou une colonne de carrés du quadrillage du plan, on obtient toujours plusieurs rectangles disjoints.

On vérifie immédiatement qu'aucun pentamino n'est totalement concave, mais c'est aussi vrai des hexaminos, des heptaminos, etc., et ce jusqu'aux polyominos constitués de 20 carrés. Les polyominos totalement concaves sont donc formés d'au moins 21 carrés (voir l'encadré 3).

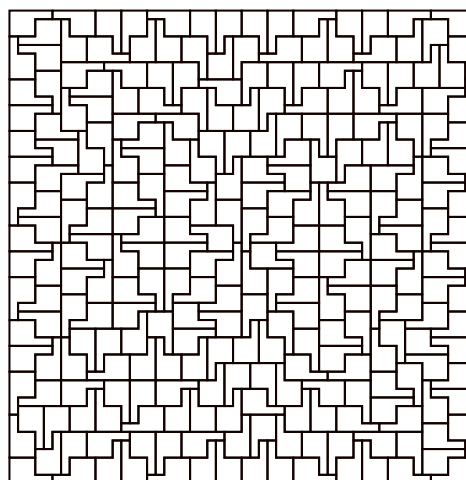
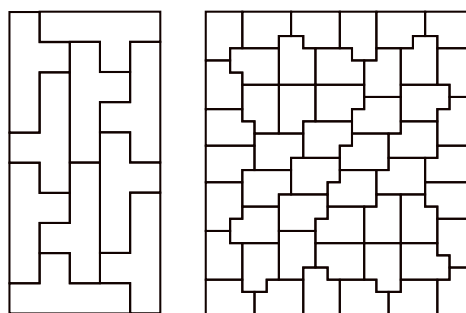
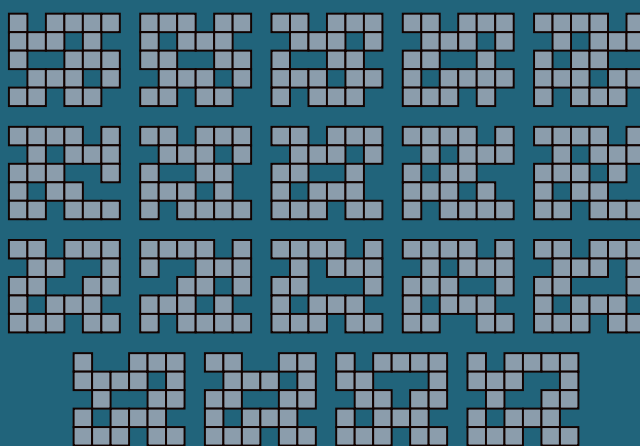
Cet étrange résultat n'a été démontré qu'en 2024, par Gill Barequet, Noga Keren, Johann Peters, Neal Madras et Adi Rivkin. Les coauteurs ont par ailleurs prouvé, dans le même article, que le nombre de polyominos totalement concaves constitués de n carrés augmente exponentiellement quand n tend vers l'infini – plus précisément, ils ont montré que ce nombre augmente au moins aussi vite que $2,4474^n$, quand n tend vers l'infini.

Compatibilité

On dit que deux polyominos P et Q sont «compatibles» si et seulement s'il existe une forme F telle qu'on peut assembler des copies de P d'une part et des copies de Q d'autre part de façon à obtenir la

3. Totalement concaves

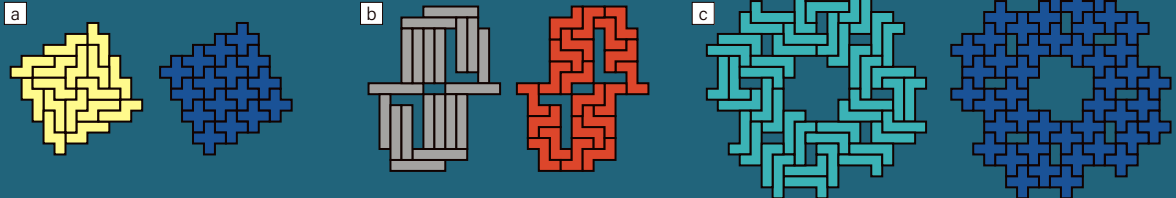
Un polyomino P est dit «totalement concave» si aucune ligne ou colonne de P n'est une suite de carrés collés les uns aux autres. Pour composer un tel polyomino, il faut au minimum 21 carrés. La liste des 19 polyominos totalement concaves «minimaux» n'a été donnée qu'en 2024 par Gill Barequet et ses coauteurs (voir ci-dessous).



Trois exemples de pavages d'un rectangle par un unique polyomino. Ces pavages utilisent respectivement 10, 50 et 270 exemplaires du polyomino de base. Dans chacun de ces trois cas, le rectangle constitué est minimal: il est impossible de former un rectangle plus petit en utilisant uniquement des copies du polyomino de base.

4. Compatibilité des pentaminos

Par définition, deux polyominos sont compatibles si et seulement s'il existe une forme qu'ils pavent chacun de leur côté. Le dessin (a) ci-dessous montre que le pentamino N est compatible avec le pentamino X. Le dessin (b) démontre que le pentamino I et le pentamino Z sont compatibles, et le dessin (c) prouve que les pentaminos L et X également.



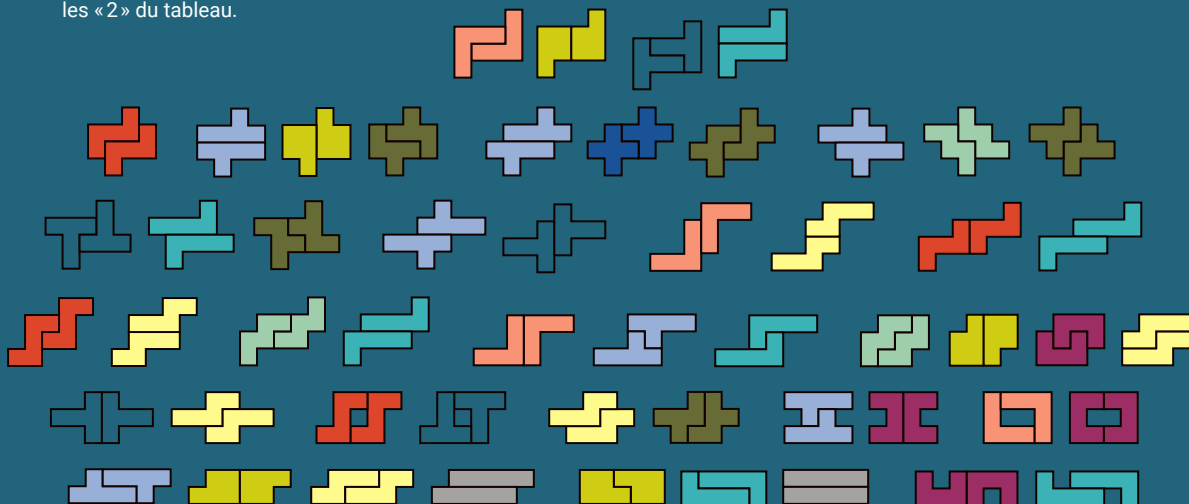
Ce problème a été introduit en 1996 par Rodolfo Kurchan dans son livre *Puzzle Fun*. L'ouvrage présente des figures établissant la compatibilité de 11 paires de pentaminos, trouvées par l'auteur et les amateurs de mathématiques récréatives Gustavo Piñeiro, Pablo Coll et Héctor San Segundo.

Une étude plus approfondie, menée depuis par George Sicherman, a permis d'établir le tableau ci-contre, qui récapitule l'état des connaissances concernant la compatibilité des 66 paires de pentaminos distincts. Pour chaque paire de pentaminos compatibles, on y indique le nombre minimum de pièces prouvant la compatibilité. Pour les paires de pentaminos incompatibles, on barre la case, et dans les deux cas où la question de la compatibilité n'est pas tranchée, on indique le symbole « ? ».



	I	L	N	P	T	U	V	W	X	Y	Z
F	10	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2
I		2	2	2	4	12	4	10	⊗	2	20
L			4	2	2	2	2	44	2	2	
N				2	2	2	2	16	2	2	
P					2	2	2	4	2	2	
T						4	2	14	4	2	2
U							2	2	⊗	2	4
V								6	⊗	2	4
W									?	2	4
X										2	?
Y											2

Les dessins ci-dessous justifient tous les « 2 » du tableau.



forme F (voir l'encadré 4). Le problème de la compatibilité consiste alors à se demander si deux polyominos fixes P et Q sont compatibles, et si oui quelle est la plus petite forme F qui convient.

Ce problème est l'objet d'une recherche méticuleuse, dont les résultats principaux sont collectés et mis en ligne par l'amateur américain de mathématiques récréatives George Sicherman, sur son site web <https://sicherman.net>. Il est cependant regrettable que les solutions qu'il a collectées – les siennes et celles d'autres amateurs – n'aient pas été publiées ailleurs que sur ce site internet: si ce dernier venait à disparaître, le travail considérable qu'il documente serait perdu.

Un grand nombre de variantes du problème ont été étudiées. On peut bien sûr s'intéresser aux problèmes de compatibilité entre hexaminos, entre heptaminos, etc. On peut aussi exiger que les formes construites n'aient pas de trou, ou qu'elles utilisent un nombre impair de copies des polyominos compatibles. Ou encore, on peut rechercher des compatibilités non pas entre deux polyominos, mais trois, ou plus.

Indécidabilité

Puisqu'on tente de répondre aux questions concernant les polyominos en mettant au point des algorithmes, se pose naturellement la question de savoir si certaines de ces questions ne seraient pas indécidables par algorithme.

En s'appuyant sur un résultat de Robert Berger sur les pavages généraux du plan, Solomon Golomb démontre dès 1970 que l'un de ces problèmes est bien indécidable: celui consistant à savoir si, à partir d'un ensemble fini de polyominos, on peut paver le plan tout entier. Autrement dit, même si l'on peut trouver des algorithmes qui, pour certains ensembles de polyominos en particulier, indiquent si ces derniers pavent le plan ou non, il est impossible de concevoir un algorithme général qui répondra sans erreur pour n'importe quel ensemble de polyominos. En 2009, le mathématicien français Nicolas Ollinger améliore ce résultat en démontrant que le problème reste indécidable même si l'on se restreint aux ensembles de 5 polyominos.

De manière implicite, dans ce problème, on accepte de translater, tourner et retourner les copies des polyominos, pour paver le plan. Mais si l'on s'interdit les rotations et les retournements (c'est-à-dire si l'on ne s'autorise que les translations), le problème devient assez différent, car il y a moins de pavages possibles. En 1984, Harry Wijshoff et Jan Van Leeuwen démontrent qu'en se limitant à

un seul polyomino le problème du pavage par translation est décidable: il existe un algorithme qui, pour n'importe quel polyomino, indique s'il pave le plan par translation. De son côté, Nicolas Ollinger montre que ce problème du pavage par translation est indécidable pour les ensembles de 11 polyominos. Entre 1 et 11, l'écart est grand... et justement, il

Le problème consistant à savoir si, à partir d'un ensemble fini de polyominos, on peut paver le plan tout entier, est indécidable par algorithme

vient d'être resserré par les mathématiciens chinois Chao Yang et ZhuJun Zhang: dans un article de 2024, ils ont démontré que le problème était indécidable pour les ensembles de 7 polyominos. Mieux encore, ce record a été amélioré par Yoonhu Kim, qui a démontré en 2025 que le problème était également indécidable pour les ensembles de 5 polyominos. D'autres progrès sur ces difficiles questions sont sans doute encore possibles; l'histoire des polyominos est loin d'être terminée! ■

BIBLIOGRAPHIE

- G. Sicherman**, 30 years of polyomino compatibility, *Cubism for Fun*, 2025.
- E. Timmermans**, Polyomino pair tilings 2, *Cubism for Fun*, 2025.
- Y. Kim**, Undecidability of tiling the plane with a set of 5 polyominoes, *arXiv preprint*, 2025.
- V. Bui**, Bounding Klarner's constant from above using a simple recurrence, *Archiv der Mathematik*, 2025.
- G. Barequet et G. Ben-Shachar**, Counting polyominoes, revisited, *ALLENEX*, 2024.
- G. Barequet et al.**, On totally concave polyominoes, 36th Canadian Conference on Computational Geometry, 2024.
- N. Ollinger**, Tiling the plane with a fixed number of polyominoes, *LATA*, 2009.
- S. Golomb**, *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packings*, Princeton University Press, 1994.
- I. Stewart et A. Wormstein**, Polyominoes of order 3 do not exist, *Journal of Combinatorial Theory*, 1992.