

Nouveaux records pour la conjecture de Proth-Gilbreath

Jean-Paul Delahaye

C'est une vieille énigme au sujet des nombres premiers, qui interroge depuis près de cent cinquante ans. Deux chercheurs viennent, indépendamment, de réaliser de nouveaux progrès.

Parmi les amateurs de mathématiques qui ont émaillé l'histoire de la discipline, on trouve d'intéressants personnages. François Proth (1852-1879) est l'un d'eux. On sait de lui qu'il était agriculteur, autodidacte, et qu'il vivait près de Verdun. Sa passion pour les nombres l'amena à écrire directement à l'Académie des sciences pour proposer des résultats et des hypothèses qui, aujourd'hui encore, portent son nom. On appelle ainsi « nombres de Proth » les nombres premiers de la forme $k \times 2^n + 1$, avec k impair et $k < 2^n$. On sait de plus les caractériser: le « théorème de Proth » assure qu'un nombre n de cette forme est premier si, et seulement si, il existe un nombre entier a compris entre 1 et $(n-1)$ tel que $a^{(n-1)/2} + 1$ est divisible par n .

Lorsqu'un nombre de Proth est premier, la moitié des entiers a compris entre 1 et $(n-1)$ vérifient la condition recherchée dans la caractérisation. Cela permet de construire un algorithme probabiliste efficace pour trouver de grands nombres premiers.

Le plus grand nombre de Proth connu est $10223 \times 2^{31172165} + 1$. Il possède 9383761 chiffres décimaux et a été découvert en 2016. C'est le treizième dans le classement des plus grands nombres premiers connus.

Tableaux triangulaires

Ce qui vaut pourtant à François Proth son plus beau titre de gloire est la formulation qu'il fit en 1878 de ce qu'on appelle la « conjecture de Proth-Gilbreath », et qu'on pourrait simplement nommer « conjecture de Proth ». Car même si Norman Gilbreath, un illusionniste professionnel américain, a reformulé l'hypothèse en 1958, il semble très injuste et navrant que certaines sources parlent simplement de « conjecture de Gilbreath ».

Cette conjecture assure que si l'on considère la suite infinie des nombres premiers, puis qu'on écrit en dessous la suite infinie des valeurs absolues de la différence entre deux termes consécutifs de cette première suite, qu'on recommence pour une troisième ligne, etc., alors en tête de chaque ligne à l'exception de la première il y aura un 1.

Une formulation de la conjecture évitant d'invoquer une infinité de lignes infinies est la suivante. Pour tout entier n , si l'on considère une ligne initiale comportant les n premiers nombres premiers, puis qu'on calcule une seconde ligne en

L'AUTEUR



Jean-Paul Delahaye

professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

en 2023. Le chercheur y donne une description précise d'une famille de suites aléatoires à partir desquelles, quand on construit un tableau comme dans la conjecture de Proth-Gilbreath, il y a une probabilité 1 pour qu'on obtienne, à partir d'un certain rang, des lignes commençant systématiquement par un 1.

À la recherche d'un contre-exemple

Cet énoncé probabiliste reste cependant très loin d'une démonstration complète de la conjecture, dans laquelle on part de la suite des nombres premiers. D'ailleurs, étant donné la résistance de cette conjecture, il ne faut pas exclure l'idée qu'elle est peut-être simplement fautive. On peut donc tenter de lui trouver un contre-exemple: une ligne qui ne commencerait pas par un 1, dans un des tableaux triangulaires de la conjecture. Plusieurs tentatives ont été faites pour trouver une telle ligne, en construisant des tableaux triangulaires de taille n , avec n de plus en plus grand. Il y a aujourd'hui une sorte de concours visant à construire des tableaux aussi grands que possible, afin de vérifier jusqu'à quel stade la conjecture est numériquement vérifiée et, peut-être, de finir par la mettre en défaut.

2	3	5	11	13	17
1	2	6	2	4	
	1	4	4	2	
		3	0	2	
			3	2	
				1	

Tableau avec le 7 manquant parmi les nombres premiers

Dès 1959, Ray Killgrove et Ken Ralston, financés par le Bureau américain de la recherche navale, ont mené un important calcul en partant d'une première ligne comportant les 63 419 premiers nombres premiers. Toutes les lignes du tableau qu'ils ont calculées à partir de cette première ligne commençaient par un 1. Un second calcul à la recherche d'une ligne fatale a été mené en 1993 par Andrew Odlyzko, aujourd'hui professeur à la School of Mathematics de l'université du Minnesota, qui a traité le cas des 346065536839 premiers nombres premiers – c'est-à-dire tous les nombres premiers inférieurs à 10^{13} . Là non plus, il n'a pas identifié de contre-exemple.

En 2025, le record d'Andrew Odlyzko a été battu par deux personnes à qui j'avais signalé le problème: Jean-François Colonna, chercheur au Centre de mathématiques appliquées de l'École polytechnique, à Saclay, et, deux jours plus tard, Simon Plouffe, chercheur québécois indépendant. Sans communiquer entre eux, et par des méthodes assez différentes, ils ont vérifié l'absence de contre-exemple dans le tableau triangulaire dont la première ligne comporte tous les nombres premiers inférieurs à 10^{14} . Les résultats intermédiaires des

2. En changeant la suite de départ

Dans la construction proposée par François Proth, plutôt que de partir de la suite des nombres premiers, on peut prendre comme point de départ une autre suite de nombres et calculer chaque nouvelle ligne, comme dans la conjecture de Proth-Gilbreath, en prenant la valeur absolue de la différence de deux termes consécutifs de la ligne précédente.

En prenant comme suite initiale la suite des puissances de 2, on constate immédiatement que la première oblique ne comporte que des 1, car toutes les lignes sont identiques à la première.

La suite de Fibonacci (f_n) conduit, quant à elle, à un résultat plus amusant. Elle est définie par $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ si $n \geq 0$, et donne le tableau 1.

On observe – et c'est assez facile à démontrer – que la première oblique est la répétition de la séquence 1 – 0 – 1, et que toutes les autres obliques finissent également par aboutir à la répétition de cette séquence.

Cette propriété se généralise. Si l'on prend une version modifiée de la suite de Fibonacci définie par $f_0 = a, f_1 = b$ (avec a et b deux entiers positifs) et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ si $n \geq 0$, on observe en effet qu'au bout d'un moment, chacune des obliques du tableau construit finit par une répétition de la séquence $p - 0 - p$, où p est le plus grand diviseur commun de a et de b . Pour $a = 12$ et $b = 30$ (et donc $\text{PGCD}(a, b) = 6$), on obtient par exemple le tableau 2.

1

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21		
1	1	0	1	1	2	3	5	8			
0	1	1	0	1	1	2	3				
1	0	1	1	0	1	1					
1	1	0	1	1	0						
0	1	1	0	1							
1	0	1	1								
1	1	0									
0	1										
1											
0	1										
1											

2

12	30	42	72	114	186	300	486	786	1272	2058	3330
18	12	30	42	72	114	186	300	486	786	1272	
6	18	12	30	42	72	114	186	300	486		
12	6	18	12	30	42	72	114	186			
6	12	6	18	12	30	42	72				
6	6	12	6	18	12	30					
0	6	6	12	6	18						
6	0	6	6	12							
0	6	6	0	6							
6	0	6	6								
0	6	6									
6	0										
6											

3. Découpages et chevauchements

Pour connaître la huitième ligne calculée de la partie du tableau triangulaire de la conjecture de Proth-Gilbreath correspondant aux nombres premiers compris entre 11 et 139, il suffit de calculer indépendamment l'une de l'autre les huitièmes lignes du tableau pour les nombres premiers compris entre 11 et 79, d'une part, et pour les

nombres premiers compris entre 47 et 139, d'autre part. La présence de 8 nombres premiers communs entre les deux tranches de départ assure que la concaténation des deux calculs donne bien la ligne initialement recherchée.

Ce procédé peut se généraliser. Il permet de diviser le calcul de

la ligne k du tableau triangulaire de Proth-Gilbreath en petites tranches, qu'on pourra confier à des processeurs différents pour effectuer un calcul en parallèle. Cette méthode de découpage évite aussi d'avoir à garder en mémoire des milliards de nombres. C'est un des éléments clés des méthodes utilisées par Jean-François

Colonna et Simon Plouffe, qui leur a permis de vérifier la conjecture en partant d'un tableau dont la première ligne comporte les 3 204 941 750 802 nombres premiers inférieurs à 10^{14} .

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	2	6	4	2	6	4	6	8	4	2	4	2	4	14	4	6	2	10	2	
1	0	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	0	4	4	2	2	4	2	2	2	4	2	2	2	2	10	10	2	4	8	8		
1	2	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	2	4	0	2	0	2	2	0	0	2	2	0	0	0	8	0	8	2	4	0		
1	2	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	2	2	4	2	2	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	0	8	8	8	6	2	4		
1	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	2	0	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	0	8	0	0	2	4	2		
1	2	0	0	2	2	0	0	2	2	2	2	2	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	8	8	0	2	2	2		
1	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	6	0	8	2	0	0		
1	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	2	4	6	8	6	2	0		
1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	4	2		
1	0	0	0	0	0	2	2	0	2	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	2	2		

deux chercheurs coïncident, ce qui donne confiance dans les énormes calculs réalisés. Notons que battre le record établi il y a trente ans par Andrew Odlyzko s'est avéré plus ardu que ce qu'on aurait pu imaginer, car même si les outils informatiques dont on dispose aujourd'hui sont considérablement plus performants, le calcul historique avait été mené avec beaucoup de soin et de savoir-faire. Nous donnons ci-après quelques détails techniques sur les calculs conduits respectivement par Jean-François Colonna et Simon Plouffe.

Profondeur d'une suite

Dans la construction ligne à ligne d'un tableau triangulaire comme le décrit la conjecture, dès qu'on arrive à une ligne qui commence par un 1 et qui ne contient, par ailleurs, que des 0 et des 2, alors la ligne suivante aura cette même propriété – et, donc, toutes les lignes suivantes également. Quand on teste la conjecture en construisant le tableau à partir d'une première ligne contenant les nombres premiers inférieurs à une certaine borne M , on peut donc cesser la construction dès qu'on a trouvé une ligne de ce type. Dans l'exemple présenté page 69,

cela se produit dès la troisième ligne calculée, et tout ce qui se situe en dessous est donc inutile.

Nous appellerons «profondeur» d'une suite de nombres premiers le nombre de lignes (s'il existe) qu'il faut calculer en plus de la première, dans cette construction, avant d'arriver à une ligne débutant par un 1 puis ne comportant que des 0 et des 2. Si une telle ligne n'existe pas, nous dirons que la profondeur de la suite de nombres premiers est infinie. Nous noterons $G(n)$ la profondeur de la suite des n premiers nombres premiers – le tableau au-dessus de l'encadré 1 pour les quinze premiers nombres premiers montre donc que $G(15) = 3$. D'après le raisonnement ci-dessus, démontrer que pour tout n , $G(n)$ est fini suffit pour établir la conjecture de Proth-Gilbreath.

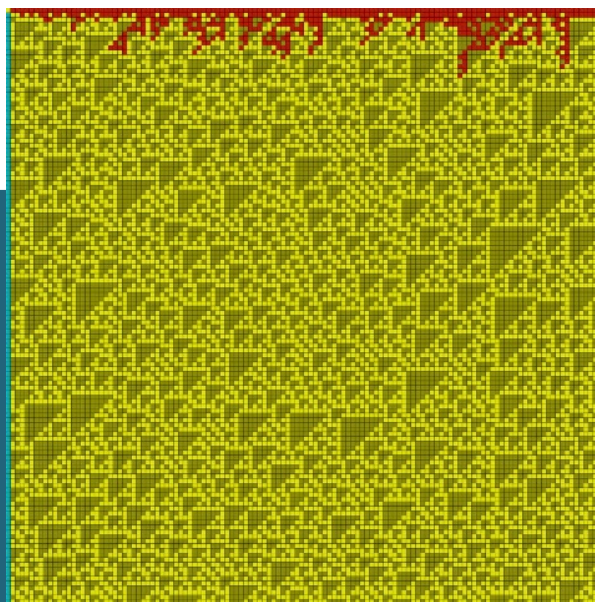
Phénomène tout à fait remarquable, il se trouve que $G(n)$ est toujours «assez petit comparativement à n ». C'est ce que montre le tableau sous l'encadré 4, construit par Andrew Odlyzko, dans lequel $\pi(x)$ désigne, pour tout nombre réel x , le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x .

La dernière ligne de ce tableau indique donc que, dans un tableau triangulaire de la conjecture, quand la première ligne contient tous les nombres

4. Un automate cellulaire caché

Si l'on dessine le tableau triangulaire de la conjecture de Proth-Gilbreath en remplaçant les nombres par des couleurs (jaune vif pour le 2, cyan pour le 1, jaune sombre pour le 0, rouge pour les entiers à partir de 3), on obtient l'image ci-contre.

On y reconnaît les motifs caractéristiques rencontrés avec les automates cellulaires. Ce n'est pas qu'une analogie de forme: une fois que l'on atteint une zone où il n'y a plus que des 0 et des 2, on a effectivement affaire à un automate cellulaire. C'est plus précisément l'un des huit automates cellulaires unidimensionnels « additifs » définis par Stephen Wolfram, ce qui a pour effet que les motifs qui se développent à partir d'un point « s'ajoutent » à ceux provenant d'un autre point. Cela a pour conséquence que jamais le désordre apparent ne disparaîtra, ce qu'on peut interpréter comme une présence de chaos dans la suite des nombres premiers.



premiers inférieurs ou égaux à 10^{13} , la 635^e ligne commence par un 1 puis ne contient que des 0 et des 2. Il n'est par conséquent pas nécessaire de calculer les 346065536839 lignes du tableau triangulaire complet pour vérifier la conjecture!

Cependant, en pratique, même peu nombreuses, les lignes qu'il est nécessaire de calculer sont extrêmement longues et difficiles à gérer. Le calcul à faire pour passer d'une ligne à la suivante est, lui aussi, très long. Heureusement, une seconde astuce évite d'avoir à manipuler une par une et à conserver en mémoire des lignes possédant des centaines de milliards de nombres entiers.

Calculer en parallèle

Il est en effet possible de réaliser les calculs « par morceaux », et donc de les mener en parallèle sur différents morceaux indépendants. On peut démontrer que si l'on veut calculer la ligne k du tableau triangulaire de la conjecture dont la première ligne comporte tous les nombres premiers inférieurs à une certaine borne M , avec M un nombre premier, on peut couper ce calcul en deux tranches. On calculera d'une part les k premières lignes du tableau pour les nombres premiers allant de 2 à p , où p est un nombre premier inférieur strictement à M , puis les k premières lignes du tableau pour les nombres premiers allant de p' à M , où p' est un autre nombre premier inférieur à M et inférieur à p , et tel qu'il y a un chevauchement des deux « tranches » de nombres premiers $\{2; 3; \dots; p\}$ et $\{p'; \dots; M\}$ d'au moins k nombres premiers (voir l'encadré 3).

Cette séparation en deux peut être répétée et, par conséquent, pourvu que les chevauchements entre deux tranches consécutives T_1, T_2, \dots, T_r contenant

tous les nombres premiers entre 2 et M soient toujours d'au moins k nombres premiers, on obtiendra la k -ième ligne du tableau recherché en calculant séparément la k -ième ligne des tableaux T_1, T_2, \dots, T_r . On peut même raccourcir encore le calcul en séparant le calcul de la ligne recherchée en tranches T_1, T_2, \dots, T_r et en calculant la profondeur de chaque tranche $G(T_1), G(T_2), \dots, G(T_r)$. Le plus grand nombre k parmi les $G(T_i)$ sera la profondeur de la ligne complète, pourvu que les chevauchements entre les tranches soient à chaque fois d'au moins k .

Pour calculer $G(\pi(10^{14}))$, la méthode de Jean-François Colonna a pris neuf jours, celle de Simon Plouffe, onze. Les méthodes mises en œuvre sont cependant assez différentes à cause des ordinateurs, des langages et des programmes utilisés.

Jean-François Colonna a exploité cinq puissants serveurs de calcul du Centre de mathématiques appliquées de l'École polytechnique. Il a pu ainsi découper et paralléliser le calcul en une centaine de calculs simultanés, dont les résultats ont été coordonnés et synthétisés par un ordinateur superviseur. La page que le chercheur a consacrée au calcul sur son site web fournit d'autres détails techniques.

De son côté, Simon Plouffe n'a utilisé que les deux ordinateurs, moins puissants, dont il dispose à son domicile. Il a mis en place une série d'astuces techniques très sophistiquées pour rendre le calcul possible malgré cet équipement limité. Un article donnant les détails de la méthode a été mis en ligne sur le site arXiv en octobre 2025.

Les deux calculs non seulement s'accordent sur la conclusion que la conjecture de Proth-Gilbreath n'est pas contredite quand on la considère sur la suite des nombres premiers inférieurs ou égaux

x	$\pi(x)$	$G(\pi(x))$
10^2	25	5
10^3	168	15
10^4	1229	35
10^5	9592	65
10^6	78498	95
10^7	664579	135
10^8	5761455	175
10^9	50847534	248
10^{10}	455052511	329
10^{11}	4118054813	417
10^{12}	37607912018	481
10^{13}	346065536839	635

Tableau récapitulatif des résultats partiels sur la conjecture de Proth-Gilbreath. Pour tout nombre réel x , $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x , et $G(\pi(x))$ la profondeur (au sens de la conjecture) de la suite constituée de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à x .

à 10^{14} , mais de plus ils démontrent l'un et l'autre que $G(\pi(10^{14}))$ vaut exactement 693, ce qui permet d'ajouter une ligne au tableau d'Andrew Odlyzko.

Dans la liste des nombres premiers inférieurs à 10^k , il existe un couple de nombres consécutifs ayant un écart maximal. Simon Plouffe a conjecturé qu'en divisant cette liste des nombres premiers inférieurs à 10^k en un grand nombre de tranches T_1, T_2, \dots, T_m , c'est celle qui contient ce couple « record » qui donnera la profondeur maximale – et qui donc donnera la profondeur de la suite complète. C'est ce qu'il a vérifié pour k allant de 2 à 14. Si cette observation reste vraie au-delà, on peut utiliser des résultats connus sur les écarts entre nombres premiers consécutifs pour conjecturer que $G(\pi(10^{15})) = 788$, $G(\pi(10^{16})) = 970$, $G(\pi(10^{17})) = 1\,199$, $G(\pi(10^{18})) = 1\,274$, $G(\pi(10^{19})) = 1\,433$ et $G(\pi(10^{20})) = 1\,462$.

Un raisonnement heuristique

La nouvelle valeur calculée pour $G(\pi(10^{14}))$ et les valeurs conjecturées pour $G(\pi(10^{15}))$ à $G(\pi(10^{20}))$ confirment ce que les travaux d'Andrew Odlyzko suggéraient déjà: la croissance des $G(n)$, quand n augmente, est très lente. Le raisonnement heuristique suivant confirme cette observation, en suggérant que $G(n)$ augmente proportionnellement à $\log(\log(n))$.

On sait que l'écart moyen entre deux nombres premiers consécutifs dans la liste des n premiers nombres premiers est de l'ordre de $\log(n)$ – c'est une conséquence d'un résultat classique sur la densité des nombres premiers.

Par ailleurs, entre deux lignes consécutives d'un tableau triangulaire de la conjecture, on pressent – et on observe assez bien – que la moyenne des nombres de la ligne est multipliée par environ $2/3$, sauf au tout début et quand on n'a plus qu'un 1, des 0 et des 2. En effet, si l'on tire au hasard uniformément un nombre A compris entre 1 et un entier N ainsi qu'un nombre B compris entre 1 et ce même entier N , A et B valent chacun, en moyenne, $N/2$. De plus, la valeur moyenne de $|A - B|$ est $N/3$. Par conséquent, en passant d'une ligne à l'autre dans un tableau triangulaire de la conjecture, on s'attend à ce qu'on multiplie la valeur moyenne des nombres d'une ligne par environ $(N/3)/(N/2) = 2/3$. En pratique, cela correspond assez bien à ce qu'on observe.

La valeur moyenne des nombres d'une ligne suit donc une décroissance exponentielle: partant d'une valeur moyenne M pour une ligne donnée, on obtient, k lignes plus loin, une valeur moyenne de l'ordre de $M \times (2/3)^k$.

Or, la moyenne des nombres d'une ligne ne contenant plus qu'un 1 en début de ligne puis des 0 et des 2 vaut environ 1. De plus, partant d'une valeur moyenne M pour une ligne donnée, la remarque du paragraphe précédent permet de dire qu'on atteint une valeur moyenne autour de 1 au bout de k lignes lorsque $M \times (2/3)^k = 1$, c'est-à-dire lorsque $k = \log(M) / \log(3/2)$. Il faut donc un nombre de lignes proportionnel à $\log(M)$ pour atteindre, dans un tableau triangulaire de la conjecture, une ligne ne contenant plus qu'un 1, des 0 et des 2.

En combinant cette dernière remarque avec celle tirée du résultat sur la densité des nombres premiers, on obtient que la suite des n premiers nombres premiers aura une profondeur proportionnelle à $\log(\log(n))$. La profondeur $G(n)$ a donc une croissance comparable à celle de $\log(\log(n))$.

Insistons sur le fait que ce raisonnement est heuristique, c'est-à-dire non totalement rigoureux, car il n'est pas prouvé que les lignes en dessous de la ligne des nombres premiers sont assimilables à des lignes provenant d'un choix aléatoire uniforme de nombres entiers entre 2 et le maximum de la ligne.

Cette augmentation très lente de $G(n)$ rend très improbable que la conjecture soit fautive, car cela impliquerait que $G(n)$ dépasse n : cela paraît peu vraisemblable.

Jean-François Colonna mène en ce moment même des calculs pour tenter de déterminer la valeur de $G(\pi(10^{15}))$. Les derniers résultats qu'il a obtenus, qui attendent une confirmation indépendante, indiquent que $G(\pi(2 \times 10^{14})) = 744$ et $G(\pi(8,5 \times 10^{14})) = 800$. Simon Plouffe a validé, par un calcul partiel, cette valeur de 800 qui contredit sa conjecture, laquelle ne donne donc pas les valeurs exactes de G , mais seulement des approximations. ■

BIBLIOGRAPHIE

- S. Plouffe**, Verification of Gilbreath's conjecture up to 10^{14} , *arXiv preprint*, 2025.
- J. F. Colonna**, La conjecture de Proth-Gilbreath, page web personnelle, 2025.
- Z. Chase**, A random analogue of Gilbreath's conjecture, *Mathematische Annalen*, 2023.
- C. Cobeli et A. Zaharescu**, A game with divisors and absolute differences of exponents, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2014.
- N. Gilbreath**, Processing process: The Gilbreath conjecture, *Journal of Number Theory*, 2011.
- A. Odlyzko**, Iterated absolute values of differences of consecutive primes, *Mathematics of Computation*, 1993.
- R. Killgrove et K. Ralston**, On a conjecture concerning the primes, *Mathematics of Computation*, 1959.
- F. Proth**, Sur la série des nombres premiers, *Nouvelle Correspondance Mathématique*, 1878.