1 Mathématiques

1.1 Remarques générales et conseils

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de mathématiques de première et de deuxième année en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

Plusieurs erreurs relevées l'an dernier ont été commises de nouveau cette année.

Une **présentation soignée** (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur. Les correcteurs ont été étonnés par le manque de soin, beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule.

On recommande aux candidats d'employer une encre foncée, restant bien visible après numérisation. Le texte et les calculs sont souvent agrémentés de petites zones de texte coloré insérées avec des flèches par des candidats ne prenant pas la peine de rédiger une phrase pour justifier une assertion ou une expression.

Il est demandé de numéroter les copies de façon cohérente, les correcteurs n'aimant pas être confrontés à un jeu de piste.

Il est fortement conseillé d'aborder et de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé.

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles. Certaines copies obtiennent une note très faible en prétendant répondre à la quasi-totalité des questions. Nous rappelons que les questions « faciles » doivent être correctement rédigées pour être complètement prises en compte, surtout en début de problème.

La rédaction est un élément essentiel d'appréciation. Elle est en fait difficilement dissociable du fond. On attend notamment des candidats la vérification de l'existence des objets manipulés, une déclaration claire des objets utilisés, un maniement soigneux des inégalités (notamment distinction entre inégalité large et inégalité stricte). Chaque théorème utilisé doit être clairement et complètement énoncé.

La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus.

Les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie.

Nous suggérons également aux candidats de se relire, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, des inégalités entre nombres complexes).

Nous soulignons également l'importance d'une lecture rigoureuse de l'énoncé, qui guide la réflexion et permet d'éviter certaines erreurs.

Les copies doivent être rédigées en Français. Les paragraphes doivent commencer à gauche de la page et non au milieu, les phrases doivent commencer par une majuscule et se terminer par un point. Quant aux connecteurs logiques $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$, ce ne sont pas des marques d'inférence et ils ne doivent donc pas remplacer « donc », « ainsi », « c'est pourquoi », etc.

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que ISMQ signifie « il suffit de montrer que » ?

L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses ; des démonstrations par l'absurde se terminent par « donc impossible ».

Trop régulièrement les candidats redéfinissent sur leur copie les objets déjà définis par l'énoncé (par exemple ils écrivent « Soit $A = \dots$ » à la première question). Inversement, trop de candidats ne prennent pas la peine d'introduire leurs propres notations.

Beaucoup de symboles mathématiques sont utilisés comme abréviations, et certains candidats utilisent des abréviations surprenantes (dc, sq, dz, sars, ...) potentiellement inconnues du correcteur. Attention aux notations non définies dans le programme et potentiellement ambigües : par exemple, utiliser $\sim$ pour désigner la similitude entre matrices est porteur de confusion avec l'équivalence entre matrices, et la signification de cette notation doit donc être précisée dans la copie dès sa première utilisation.

1.2 Mathématiques 1 - filières MP et MPI

1.2.1 Généralités et présentation du sujet

Le problème portait sur les probabilités, en utilisant plusieurs chapitres du reste du programme, séries entières, intégration ou encore algèbre euclidienne.

Toutes les questions étaient fermées, il n'y avait donc pas de risque de se retrouver bloqué et beaucoup de candidats ont balayé l'ensemble du sujet, en sautant plus ou moins de questions.

Le sujet était un peu long, mais raisonnablement puisque quelques candidats l'ont traité en entier. Il y avait des questions difficiles, mais suffisamment de questions abordables pour permettre un étalement correct des notes. Nous avons obtenu une moyenne et un écart type satisfaisants, ce problème a donc permis de classer correctement les candidats.

La première partie portait sur l'inégalité de Hölder, avec trois questions classiques pour lesquelles on attendait une rédaction précise. Les performances sur ces questions ont été plutôt décevantes, pour les premières questions on attend une rédaction soignée et il ne faut pas oublier les cas particuliers.

Pour terminer, revenons sur la présentation des copies. Il n'y a peut-être pas d'aggravation par rapport aux années précédentes, mais les calculs avec des indices présents dans de nombreuses questions de ce problème pouvaient être carrément illisibles. Reprenons donc ce qui était dit dans les rapports des années précédentes : le bénéfice du doute n'existe pas, si on n'arrive pas à lire, ou s'il faut aller chercher les calculs au milieu de gribouillages, on met 0 à la question.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe A.

1.3 Mathématiques 2 - filière MP et MPI

1.3.1 Présentation du sujet

Le sujet de cette année portait sur un résultat d'algèbre appelé théorème de Schur-Cohn et utilisé dans le domaine des système dynamiques.

Il commençait par une liste de notations, certaines classiques et figurant au programme (par exemple la transposée d'une matrice qui, on le rappelle, est notée $M^\top$, et non plus t^M), d'autres nouvelles.

La première partie ne consistait qu'en des manipulations de polynômes et était abordable en première année, même s'il fallait parfois manipuler certaines sommes de façon assez fine.

La deuxième partie avait pour but d'étudier la liberté d'une famille de polynômes dans différents cas de figure. Elle aussi était abordable dès la première année, et était la partie la plus abordable, même si elle comportait tout de même une question assez difficile.

Dans une troisième partie (abordable elle aussi en première année, à part en ce qui concerne une manipulation de polynômes de matrices), on demandait de prouver la non inversibilité d'une matrice noté $J(p)$ sous une certaine hypothèse. Cette partie était assez calculatoire.

La quatrième partie utilisait le programme de réduction de deuxième année et avait pour but de démontrer le critère de Schur-Cohn annoncé en préambule. Elle était assez difficile et demandait d'être à l'aise avec la notion de vecteurs propres orthogonaux.

La cinquième partie donnait une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour la matrice $J(p)$ déjà étudiée dans la troisième partie. Cette partie était assez simple car il suffisait de faire un bilan des questions précédentes.

8 Annexes

Ces annexes ne proposent pas un corrigé des épreuves, mais rassemblent les commentaires, question par question, des épreuves écrites par matière et pas filière. Les énoncés sont disponibles sur le site du concours à l'adresse :

www.concoursminesponts.fr

A Mathématiques 1 MP/MPI

Q1 - La méthode la plus simple consiste à utiliser la concavité de la fonction logarithme népérien, mais il ne fallait pas oublier de traiter à part le cas x, ou y, nul.

Q2 - Le cas particulier $E(X^p) = E(Y^q) = 1$ se déduisait de la question précédente. Dans le passage au cas général, le cas $E(X^p)$ ou $E(Y^q)$ nulle devait être aussi envisagé à part.

Q3 - Dans la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que nous n'avons pas vue dans plus d'une copie sur deux, on obtient un polynôme du second degré si le coefficient du terme de degré 2 n'est pas nul, ici aussi c'était un cas particulier à évoquer.

Q4 - L'inégalité demandée se démontrait assez facilement en utilisant les développements en série entière, mais pour avoir tous les points, un minimum de justification de l'inégalité entre les coefficients était attendu.

Q5 - On attendait l'évocation de l'indépendance des variables aléatoires $e^{tc_iX_i}$, déduite de celle des variables X_i, sans qu'il soit exigé de mentionner le lemme des coalitions.

Q6 - L'inégalité de Markov était indiquée, elle était en général bien connue mais souvent mal appliquée.

Q7 - L'égalité

$$P(|x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i| > tx) = P(exp(|x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i|) > e^{tx})$$

n'était pas souvent justifiée, au mieux on évoquait la croissance, et pas la croissance stricte, de la fonction exponentielle.

On en déduisait une inégalité, puis on utilisait la valeur de x qui donnait la majoration la plus fine. Il était admis de donner sans justification $x = \frac{t}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$ après un travail au brouillon sur le trinôme.

On passait ensuite à l'objet principal du sujet, les inégalités de Khintchine.

Q8 - Cette question a été en général très mal traitée. La fonction intégrée est continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$ (mais pas continue, comme on l'a souvent lu) ce qui réglait la question de la borne 0. Pour la borne $+\infty$, il suffisait de remarquer que l'intégrande était nulle à partir d'une certaine valeur. La fin de la question était plus délicate elle a été assez peu abordée et nous avons trouvé des raisonnements dénués de sens.

Q9 - Cette question commençait par une étude très classique de convergence d'intégrale, mais pour avoir le maximum il ne fallait pas oublier de mentionner que la fonction intégrée était continue. La fin de la question, avec l'utilisation des questions 8 puis 7 a été souvent réussie.

Q10 - Le calcul algébrique initial a été souvent fait correctement, il ne fallait pas négliger ensuite de donner un minimum de justification pour l'espérance des variables aléatoires X_i et X_i^2.

Q11 - Q12 - Ces deux questions ont été en général sautées, sauf dans les très bonnes copies et celles de niveau très faible, dans lesquelles on trouvait la totalité des questions, mais tout était faux. Les copies de ces deux types étaient rares.

Q13 - On pouvait déterminer l'expression explicite de θ ou utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, mais dans les deux cas il était important de bien justifier l'appartenance de θ à l'intervalle $]0,1[$.

Q14 - Q15 - Ces questions, qui étaient très techniques ont été très peu abordées, les candidats étant attirés par la question 17, ce qui est tout à fait normal puisqu'on se retrouvait en terrain plus familier. Certains ont vu une équivalence de normes et ont invoqué la dimension finie. Il est vrai que, puisque Ω est fini, $L^0(\Omega)$ est de dimension finie, mais cela n'est pas un résultat du cours et pour être pris en compte il fallait le démontrer, ce que nous n'avons pratiquement jamais vu. Les démonstrations directes dans l'esprit du sujet rédigées correctement n'ont pas été très nombreuses.

Q16 - Cette question était une simple récapitulation des deux précédentes, mais probablement en raison de sa position en fin de partie et juste avant la question 17, elle n'a pas eu beaucoup de succès. Certains n'ont pas vu la différence avec la question précédente.

Q17 - La question a été abordée par presque tous les candidats, et quasiment tous ont justifié correctement que ϕ était bilinéaire symétrique et positive. La justification de définie positive était plus nuancée, mais quand même globalement correcte.

Q18 - Cette question se traitait avec la même technique que la question 10, on l'a trouvée dans un bon nombre de copies, souvent correctement faite.

Q19 - La fin de cette partie consistait à aller chercher les bonnes questions à utiliser, ce qui supposait une vue d'ensemble du sujet, ce qui n'est pas facile pour une épreuve de trois heures.

Q20 - Q21 - Les deux dernières questions n'ont été abordées que par les très bons candidats, les meilleurs d'entre eux arrivant même à les traiter complètement. On les trouvait également dans des copies (heureusement peu nombreuses) qui touchaient à toutes les questions du sujet, n'en résolvaient quasiment aucune correctement et trouvaient mystérieusement une solution fausse aux deux dernières questions.

RETOUR

B Mathématiques 2 MP/MPI

Q1 - La première égalité a été prouvée correctement par une grande majorité de candidats. Cependant, pour la deuxième, la plupart des candidats n'ont pas vu qu'il fallait un argument supplémentaires pour justifier qu'une égalité vraie sur $\mathbf{R}_\star$ était en fait vraie sur $\mathbf{R}$ tout entier (et donc impliquait une égalité formelle de polynômes). Que ce soit parce que deux polynômes coïncidant sur une partie infinie sont en fait égaux, ou de la continuité, ou simplement en évaluant en 0 et en constatant que les deux polynômes avaient la même valeur, il y avait un argument supplémentaire à donner.

Q2 - Un sens a été fait correctement par la plupart des candidats mais, pour la réciproque (trop souvent confondue avec la contraposée, ce qui fait que beaucoup de candidats ont montré deux fois la même implication), trop de candidats pensent que « premiers entre eux » signifie « ne pas avoir de racine commune », surtout dans un cadre réel. Il fallait préciser que p était scindé.Précisons que pour un raisonnement par double implication, il est nécessaire de bien préciser les hypothèses au début de chaque implication, et également de bien différencier une hypothèse d'une affirmation (souvent sans preuve) et également de ce qu'on souhaite prouver. Beaucoup de candidats pensent également que deux polynômes ne sont pas premiers entre eux si et seulement si l'un des deux divise l'autre, ou appliquent le théorème de Bézout avec des compositions à la place de produits, mais également avec des coefficients réels ou même entiers relatifs ou des fractions rationnelles ! De plus, trop de candidats ont dit directement que les racines de p_0 étaient les $1/\alpha_j$, sans se préoccuper du fait que α_j pouvait être nul.

Q3 - Trop de candidats arrivaient à la conclusion que $\lambda = 1$. Même s'il n'est pas impossible que l'énoncé demande un résultat plus faible, le jury conseille aux candidats de bien se relire s'ils arrivent à montrer un résultat plus fort que celui de l'énoncé. Les formules de Viète sont plutôt bien connues des candidats. Beaucoup de candidats oublient de préciser que les racines sont simples, ce qui était indispensable. De plus, trop de candidats ont affirmé qu'un nombre égal à son inverse valait forcément 1. Signalons malheureusement un trop grand nombre de candidats qui disent que deux polynômes ayant les mêmes racines sont égaux ou, parfois, égaux ou opposés, pour coller au sujet : rappelons que « les tentatives d'arnaque » ne sont jamais payantes, et laissent un a priori négatif au correcteur pour la suite de la copie.

Q4 - Cette question a donné beaucoup de soucis aux correcteurs, même si elle a été plutôt bien traitée dans l'ensemble : le jury a dû se montrer extrêmement vigilant pour ne pas se laisser abuser par de trop nombreux candidats qui, après une vingtaine de lignes ne menant nulle part, arrivaient par une pirouette au bon résultat. L'écriture de $(p')_0$ pose parfois problème. La dépendance du polynôme réciproque en fonction du degré du polynôme de départ n'a pas toujours été bien comprise, ce qui compromet la question, et beaucoup de candidats ont confondu $(p')_0$ et $(p_0)'$. Beaucoup de candidats ont affirmé (à tort) que $p \mapsto p_0$ est linéaire et involutive. De plus, beaucoup de copies ne détaillent en rien certains calculs : le jury rappelle que le but des candidats est d'être compris, si les calculs ne sont pas du tout détaillés, le jury peut ne pas attribuer les points.

Q5 - Cette question a beaucoup interpellé le jury : la majorité des copies invoque le théorème de Rolle pour montrer que p' est scindé sur $\mathbf{R}$, mais **aucune hypothèse n'est évoquée**. Le jury peut concevoir que des candidats ne les connaissent pas, que des candidats se trompent, mais le très grand nombre de copies sans hypothèses (copies qui ne sont pas forcément mauvaises d'ailleurs) laisse penser le résultat beaucoup plus difficilement concevable suivant : **la plupart des candidats semblent ne même pas se douter que, pour appliquer un théorème, il faut vérifier les hypothèses. Le jury rappelle cette évidence avec force**.

Q6 - Le fait que α_i soit racine de chaque polynôme f_j n'a pas posé de difficulté particulière aux candidats (même si plusieurs candidats ont confondu l'indice k de la question, fixé, avec celui qui sert à décrire le produit dans f_j). Cependant, le caractère lié de la famille $(f_1, ..., f_n)$ a posé problèmes, trop de candidats déclarant tout simplement que des polynômes admettant une racine commune étaient forcément liés, ou qui disent que $f_1(a_j), ..., f_n(a_j)$ est liée donc $f_1, ..., f_n$. Encore une fois, le jury rappelle une évidence : il vaut mieux ne rien écrire que d'inventer des propriétés qui n'existent pas.

Q7 - La linéarité de P_j n'a pas posé de difficulté particulière (même si trop de candidats se sentent obligés de prouver que $P_j(0) = 0$), mais très peu de copies ont su montrer que P_j était effectivement à valeurs dans E. Quant au noyau, le jury attendait une écriture du type $Vect$, ou une écriture dépendant d'un paramètre, mais pas une écriture du type

$$f = \frac{(1 - \alpha_j^2) f(\alpha_j)}{X - \alpha_j},$$

qui n'a évidemment aucun sens mathématique (en tant que définition). De plus, trop de candidats sont partis de cette égalité pour donner le noyau, ne se rendant pas compte qu'ils ne montraient qu'une inclusion et pas une égalité.

Q8 - Cette question n'a pas posé de difficulté particulière.

Q9 - Cette question était difficile et a été traitée par un très petit nombre de candidats.

Q10 - Dans cette question, il fallait justifier l'écriture de $(S^\top)^i$ et ne pas se contenter de faire un produit avec les doigts et de donner le résultat (récurrence ou application linéaire associée). De plus, après avoir donné l'expression des vecteurs de l'énoncé, il fallait un tant soit peu justifier que c'était effectivement une base (au moins dire : on reconnaît la base canonique). Donner l'expression des vecteurs et dire que c'était évidemment une base ne rapportait aucun point.

Q11 - Cette question était calculatoire et difficile mais a tout de même été résolue par un nombre important de candidats. Cependant, il ne fallait pas oublier que l'ordre d'un produit change avec la transposée, et que l'ordre ne changeait pas parce que les matrices commutaient entre elles. Là aussi, rappelons aux candidats que le jury est attentif et repère vite les « tentatives d'arnaques ».

Q12 - Cette question a aussi été souvent bien traitée (même si beaucoup de candidats pensaient que le produit $U^\top U$ était impossible et ont conclu à une erreur d'énoncé) mais, comme toutes les questions où le résultat est donné, le jury doit être convaincu que le candidat ne trouve pas miraculeusement le bon résultat.

Q13 - Trop de candidats arrivent à

$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j^2) V j V j^\top,$$

et en déduisent directement le résultat. Il fallait également préciser que $f_j(S^\top) = f_j(S)^\top$.

Q14 - Les candidats ont presque tous oublié de séparer les cas, selon que la racine stable était égale à son inverse ou non : précisons que, pour appliquer la question 6, il fallait deux racines (alors qu'une racine égale à 1 ou -1 peut être simple, et alors on ne pouvait pas appliquer la question 6). De plus, l'ensemble des matrices non inversibles n'étant pas un groupe, il fallait justifier le fait qu'un produit de matrices avec une matrice non inversible était non inversible (soit par un calcul de déterminant, soit par un argument de rang, de noyau etc.).

Q15 - Trop de candidats ont « prouvé » que $X \mapsto PX$ est un isomorphisme de F dans lui-même et donc que si un espace vectoriel vérifie C_A, alors il vérifie C_B , ce qui était faux et ne rapportait évidemment aucun point. Il fallait montrer que s'il existait un espace vectoriel vérifiant C_A, alors il existait un autre espace vectoriel vérifiant C_B isomorphe (et donc de même dimension) à ce premier espace vectoriel. Précisons d'ailleurs que dire simplement « PF est de même dimension que F car P est inversible » était insuffisant : il fallait passer par une application linéaire associée, ou préciser que $X \mapsto PX$ était un automorphisme car P est inversible, donc préserve la dimension (et précisons également qu'en dimension finie, l'image d'un espace vectoriel ne peut pas avoir une dimension plus grande que celle de l'espace de départ). De plus, beaucoup de candidats ont pensé que P était orthogonale et donc que $P^{\mathsf{T}} = P - 1$.

Q16 - Dans cette question et la suivante, trop peu d'élèves ont vu la nécessité d'avoir des vecteurs propres orthogonaux (et même une base orthonormale). Précisons que « théorème » est un mot masculin, et donc qu'on dit « théorème spectral » et non pas « théorème spectrale ». De plus, trop de candidats pensent qu'une combinaison linéaire ou une somme de vecteurs propres donne encore un vecteur propre.

Q17 - La première partie de la question a été assez souvent réussie grâce à la formule de Graßmann. Cependant, trop de candidats confondent supplémentaire et complémentaire (et union et somme). Dans combien de copies peut-on lire : «x n'est pas dans F_M donc est dans son orthogonal »,alors qu'un simple dessin en dimension 2 permet de se convaincre que c'est (très) faux ?

Q18 - De plus, comme il a déjà été dit : pour appliquer un résultat, il faut vérifier les hypothèses. Ainsi, il ne fallait pas oublier de préciser que la matrice $J(p)$ était symétrique. Beaucoup de candidats ont pensé que V était orthogonale et que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de $J(p)$.

Q19 - Dans cette question, trop peu de candidats ont pensé à dire que la matrice D donnée à la question 13 était inversible lorsqu'aucune racine n'était stable, et donc que c'était V qui n'était pas inversible. Il fallait donc utiliser le fait que les vecteurs colonnes étaient liés et ne pas oublier de préciser que les scalaires étaient non tous nuls.

Q20 - Question assez simple qui ne demandait que de faire un bilan de ce qui précédait. Précisons que, dans ce cas, les numéros des questions utilisées doivent être cités explicitement, on ne peut pas se contenter de dire : « d'après ce qui précède ».

Les questions suivantes ont été trop peu traitées.

↑RETOUR