

CCINP 2024 – Maths 1 – MP-MPI

Q1. $P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$ car $(X > k - 1) = (X > k) \sqcup (X = k)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kP(X = k) &= \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{k}_{=1+k-1} P(X > k - 1) - kP(X > k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n P(X > k - 1) + \sum_{k=1}^n ((k - 1)P(X > k - 1) - kP(X > k)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) + 0 - nP(X > n) \end{aligned} \quad \text{par télescopage}$$

donc $\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.

On montre alors que $nP(X > n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En effet, X est d'espérance finie et

$$nP(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} nP(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

en tant que reste d'une série convergente.

On en déduit de la relation précédente que la série $\sum P(X > n)$ converge et que $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

Remarque : c'est ce qui semble attendu par le sujet qui ne choisit pas la solution de facilité. En effet, on travaille ici avec des termes positifs ce qui permet, quitte à calculer dans $[0, +\infty]$ (mais en réalité tout est fini ici) d'utiliser le théorème de Fubini :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X = j) = \sum_{0 \leq k < j} P(X = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{j-1} P(X = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} jP(X = j) = E(X).$$

Q2. $(X \leq k)$ signifie que toutes les boules tirées sont dans $\llbracket 1, k \rrbracket$. Comme tous les tirages se font avec remise de manière indépendante, on obtient $P(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$ si $k \leq n$ et 1 si $k > n$ (expression valable pour $k = 0$).

On obtient alors pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$ donc $P(X = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p$.

Q3. Comme $x \mapsto x^p$ est continue sur $[0, 1]$, en reconnaissant une somme de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

Puis, en utilisant **Q1** et la question précédente,

$$\frac{1}{n} E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p\right) = \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1} \neq 0$$

donc $E(X) \sim \frac{np}{p+1}$.

EXERCICE I

Q1. ■ Pour tous P, Q dans E , $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ continue sur \mathbb{R}^+ et on a $P(x)Q(x)e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc

l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$ converge et l'application $(P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle$ est bien définie.

- La linéarité de l'intégrale entraîne la bilinéarité de $\langle \cdot | \cdot \rangle$.
- La symétrie de $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une conséquence de la commutativité du produit réel.
- On a $\langle P | P \rangle = \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x} dx \geq 0$ car $\forall x \in [0, +\infty[$, $P^2(x)e^{-x} \geq 0$.
- Si $\langle P | P \rangle = \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x} dx = 0$, comme la fonction $x \mapsto P^2(x)e^{-x}$ est continue positive alors elle s'annule sur $[0, +\infty[$ par suite P s'annule sur $[0, +\infty[$ donc P est le polynôme nul car il admet une infinité de racines.

Finalement l'application $(P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Q2. On cherche $P_F(X^2) = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $X^2 - P_F(X^2) = P_{F^\perp}(X^2) \in \mathbb{R}_1[X]^\perp$. Or

$$\langle X^2 - aX - b | 1 \rangle = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - a \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx - b \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2! - a \cdot 1! - b \cdot 1 = 2 - a - b$$

et

$$\langle X^2 - aX - b | X \rangle = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx - a \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - b \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 3! - a \cdot 2! - b \cdot 1! = 6 - 2a - b.$$

On a donc $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$ donc $a = 4$ et $b = -2$: $P_F(X^2) = 2P_0 + 4P_1 = 4X - 2$.

Q3. ■ Écrivons $\|X^2\|^2 = \|(X^2 - P_F(X^2)) + P_F(X^2)\|^2$ avec $P_F(X^2) \perp P_{F^\perp}(X^2) = X^2 - P_F(X^2)$, le théorème de Pythagore donne

$$\|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2$$

■ On a

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx &= \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - (aX + b)\|^2 \\ &= (d(X^2, F))^2 \end{aligned}$$

d'après le théorème de la projection orthogonale, F étant de dimension finie, on a

$$(d(X^2, F))^2 = \|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2$$

Or

$$\begin{aligned} \|X^2\|^2 &= \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = 4! = 24 \\ \|P_F(X^2)\|^2 &= \int_0^{+\infty} (4x - 2)^2 e^{-x} dx \\ &= 16 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - 16 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx + 4 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= 20 \end{aligned}$$

d'où

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx = (d(X^2, F))^2 = 4$$

EXERCICE II

Q1. $Z = \sup(X, Y)$ et $T = \inf(X, Y)$ donc $T \leq Z$ et

- Si $m < n$ alors $\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = 0$.
- Si $m > n$ alors

$$[Z = m] \cap [T = n] = ([X = m] \cap [Y = n]) \cup ([X = n] \cap [Y = m])$$

c'est une réunion d'événements disjoints ainsi

$$\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = \mathbb{P}([X = m] \cap [Y = n]) + \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = m])$$

par indépendance de X et Y on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) &= \mathbb{P}([X = m]) \mathbb{P}([Y = n]) + \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y = m]) \\ &= 2p^2 q^{n+m}\end{aligned}$$

- Si $m = n$ alors

$$[Z = n] \cap [T = n] = ([X = n] \cap [Y = n])$$

et

$$\mathbb{P}([Z = n] \cap [T = n]) = \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = n])$$

l'indépendance de X et Y donne

$$\mathbb{P}([Z = n] \cap [T = n]) = \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y = n]) = p^2 q^{2n}$$

Finalement

$$\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ p^2 q^{2n} & \text{si } m = n \\ 2p^2 q^{n+m} & \text{si } m > n \end{cases}$$

Q2. La famille $([T = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathbb{P}(Z = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n])$$

or si $m < n$ $\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = 0$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = m) &= \sum_{n=0}^m \mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) \\ &= p^2 q^{2m} + \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2 q^{n+m} \\ &= p^2 q^{2m} + 2p^2 q^m \frac{1 - q^m}{1 - q}\end{aligned}$$

ce qui donne $\mathbb{P}(Z = m) = pq^m (2 - (q + 1)q^m)$

CCINP 2020 – Maths 1 – MP

Q1. Par construction, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $N \geq 2$, $T_{n,N}$ est une variable aléatoire finie, donc X_N est une variable aléatoire finie comme somme (finie!) de telles variables aléatoires. X_N admet donc une espérance et une variance. Notons que

$$\mathbb{E}(T_{n,N}) = \frac{1}{N} \cdot 0 + \frac{1}{N} \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right) 2 = 2 - \frac{3}{N}$$

Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X_N) = \sum_{n=1}^N \frac{\mathbb{E}(T_{n,N})}{3^n} = \left(2 - \frac{3}{N}\right) \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{1}{3^N}}{1 - \frac{1}{3}}$$

Et finalement :

$$\mathbb{E}(X_N) = \left(2 - \frac{3}{N}\right) \frac{3^N - 1}{2 \cdot 3^N}$$

Par ailleurs, comme les $T_{n,N}$ sont mutuellement indépendants, d'après le lemme des coalitions, les $\frac{T_{n,N}}{3^n}$ le sont aussi. Donc

$$\mathbb{V}(X_N) = \sum_{n=1}^N \mathbb{V}\left(\frac{T_{n,N}}{3^n}\right)$$

Or, par formule de transfert, on a

$$\mathbb{E}(T_{n,N}^2) = \frac{1}{N} \cdot 0 + \frac{1}{N} \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right) 4 = 4 - \frac{7}{N}$$

Donc

$$\mathbb{V}(T_{n,N}) = 4 - \frac{7}{N} - \left(2 - \frac{3}{N}\right)^2 = \frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}$$

On a donc

$$\mathbb{V}(X_N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{3^{2n}} \left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right) = \frac{1}{9} \frac{1 - \frac{1}{9^N}}{1 - \frac{1}{9}} \left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right)$$

Finalement

$$\mathbb{V}(X_N) = \frac{9^N - 1}{8 \cdot 9^N} \left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right)$$

Q2. Puisque X_N admet une variance (d'après la question précédente), l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique, et

$$0 \leq \mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X_N)}{\varepsilon^2} = \frac{9^N - 1}{8 \cdot 9^N \varepsilon^2} \left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right)$$

L'inégalité de gauche étant due au fait qu'une probabilité est à valeurs dans $[0, 1]$. Le terme de droite tend vers 0 (c'est le produit de $\frac{9^N - 1}{8 \cdot 9^N \varepsilon^2}$, qui est convergent donc borné, et d'une suite qui tend vers 0 comme différence de deux telles suites), donc, par encadrement, $\mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Q3. La quantité $|\mathbb{E}(X_N) - 1|$ est une constante, donc $\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ne peut valoir que 0 ou 1. Distinguons deux cas.

- Si $|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, alors

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1$$

et on a alors bien (puisqu'une probabilité est majorée par 1)

$$\mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

- Si $|\mathbb{E}(X_N) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Supposons que $|X_N - 1| \geq \varepsilon$. On a alors (par inégalité triangulaire)

$$\varepsilon \leq |X_N - 1| = |X_N - \mathbb{E}(X_N) + \mathbb{E}(X_N) - 1| \leq |X_N - \mathbb{E}(X_N)| + |\mathbb{E}(X_N) - 1| \leq |X_N - \mathbb{E}(X_N)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

On a montré l'inclusion d'événements

$$(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \subset \left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et par croissance des probabilités, on a donc

$$\mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mathbb{P}\left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbb{E}(X_n) = \left(2 - \frac{3}{N}\right) \frac{3^N - 1}{2 \cdot 3^N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$, on a, à partir d'un certain rang,

$$|\mathbb{E}(X_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc, à partir d'un tel rang,

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_n) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Par ailleurs, d'après la question précédente, on a

$$\mathbb{P}\left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} .$$

Puisque $(\mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon))_N$ est une suite positive majorée par une suite tendant vers 0, par encadrement, on en déduit finalement que

$$\mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

CCP 2016 – Maths 1 – MP

Q1. Par sommation d'une famille à termes réels positifs, symétrie, puis somme double produit, dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i}{2^{i+j}} + \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{j}{2^{i+j}} = 2 \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \left(\frac{i}{2^i} \times \frac{1}{2^j} \right) = 2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

Première méthode On peut ensuite utiliser le théorème de Fubini positif en écrivant

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$$

d'où on tire que $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, de somme 8.

Deuxième méthode Nous allons reconnaître un produit de Cauchy en écrivant

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} = (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Donc, par absolue convergence des séries géométriques (à termes positifs) toutes deux égales à $\sum \left(\frac{1}{2} \right)^n$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right)^2 = 4.$$

Finalement,

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1-1) \left(\frac{1}{2} \right)^n = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 8.$$

Ainsi, $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, de somme 8.

Troisième méthode

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1},$$

la seconde étant obtenue par dérivation de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

De ces relations, on déduit (en évaluant en $x = \frac{1}{2}$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

Donc $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable de somme égale à 8.

Q2. (a) Les relations données définissent bien une loi de probabilité sur l'univers dénombrable \mathbb{N}^2 , puisque, en notant $u_{i,j} = \frac{i+j}{2^{i+j}}$,

- $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{u_{i,j}}{8} \geq 0;$
- $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{1}{8} \underbrace{\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j}}_{=8} = 1.$

(b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a la décomposition d'événement

$$(X = i) = \bigsqcup_{j=0}^{+\infty} ((X = i) \cap (Y = j)),$$

cette réunion étant disjointe, donc

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{u_{i,j}}{8}.$$

De même, on a

$$\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = j) \cap (Y = i)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{u_{j,i}}{8} = \mathbb{P}(X = i),$$

puisque $u_{i,j} = u_{j,i}$. Les variables aléatoires X et Y suivent donc la même loi, donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{u_{k,\ell}}{8} = \frac{4u_{k,1}}{8} = \frac{k+1}{2^{k+2}}.$$

(c) On a d'après l'énoncé

$$\mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 0)) = \frac{0+0}{2^{0+0+3}} = 0.$$

Pourtant $\mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{0+1}{2^{0+2}} \times \frac{0+1}{2^{0+2}} = \frac{1}{16} \neq \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 0))$, donc

les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

EXERCICE I

Par définition, la fonction génératrice g_X de la variable aléatoire X (qui prend ici ses valeurs dans \mathbb{N}) est la somme de la série entière

$$g_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n.$$

On reconnaît là le développement en série entière de l'exponentielle (qui a un rayon de convergence infini)

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad g_X(z) = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda z - \lambda}.$$

La restriction de g_X à \mathbb{R} est donc de classe C^∞ et se dérive terme à terme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_X(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) n x^{n-1}.$$

En évaluant en $x = 1$, on obtient l'espérance de X

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n) = g'_X(1) = \frac{d}{dx} (e^{\lambda x - \lambda})_{x=1} = \lambda.$$

Pour calculer le moment d'ordre 2 de X , on dérive une seconde fois et on évalue en $x = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''_X(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) n(n-1) x^{n-2},$$

donc

$$g''_X(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X).$$

D'où

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X) + g''_X(1) = \lambda + \frac{d^2}{dx^2} (e^{\lambda x - \lambda})_{x=1} = \lambda + \lambda^2,$$

et on déduit la variance de X avec la formule de Huygens

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda.$$

On a donc bien $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

Partie 4 du problème

Q1. (a) Puisque S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$, l'espérance de S_n est $\mathbb{E}(S_n) = nx$ et sa variance est $\mathbb{V}(S_n) = nx(1-x)$. Appliquons alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout réel $\beta > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \beta) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\beta^2}.$$

En choisissant $\beta = n\alpha$ (avec $\alpha > 0$), on obtient ainsi

$$\mathbb{P}(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$

Mais le polynôme $x \mapsto x(1-x)$, qui a pour racines 0 et 1, atteint son maximum en $x = 1/2$, et ce maximum vaut $1/4$. On a donc la majoration

$$\mathbb{P}(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

(b) D'après la formule de transfert, on a, puisque $S_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_n = k) f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Mais par définition de la loi binomiale, $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, donc

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(f)(x).$$

Q2. (a) Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $[0, 1]$, donc uniformément continue (c'est le théorème de Heine). Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (a, b) \in [0, 1]^2, \quad |a - b| \leq \alpha \implies |f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

Pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a alors $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$, donc en utilisant l'implication précédente avec $a = \frac{k}{n}$, on en déduit

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \alpha \implies \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

(b) D'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) \right| &\leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \mathbb{P}(S_n = k) \\ &\leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha}} 2 \|f\|_{\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \\ &= 2 \|f\|_{\infty} \times \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha}} (S_n = k) \right), \end{aligned}$$

la réunion étant disjointe. Mais pour toute éventualité $\omega \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \omega \in \bigsqcup_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha}} (S_n = k) &\iff \exists k \in \{0, \dots, n\}, \left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha \text{ et } S_n(\omega) = k \\ &\iff \left| \frac{S_n(\omega)}{n} - x \right| > \alpha \iff \omega \in \left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right), \end{aligned}$$

ce qui fait que $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha}} (S_n = k) \right) = \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right)$. La majoration de la somme étudiée se réécrit donc

$$\left| \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) \right| \leq 2 \|f\|_{\infty} \times \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right).$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Considérons le réel $\alpha > 0$ introduit dans la question 1.a. Fixons $x \in [0, 1]$. Pour estimer la différence $|B_n(f)(x) - f(x)|$, il suffit de réécrire $f(x)$ sous la forme d'une somme

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(d'après la formule du binôme). On a alors

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) \right|. \end{aligned}$$

Décomposons alors cette somme suivant les indices $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ tels que $\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \alpha$ et suivant ceux tels que $\left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha$

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) \right| \\ &\leq \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \alpha} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \mathbb{P}(S_n = k) + \left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) \right|. \end{aligned}$$

D'après la question 2.a, on a $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon$ pour tous les k tels que $\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \alpha$. On en déduit une majoration de la première somme

$$\sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \alpha} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \mathbb{P}(S_n = k) \leq \varepsilon \times \underbrace{\sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \alpha} \mathbb{P}(S_n = k)}_{\leq \mathbb{P}(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Quant à la deuxième somme, on peut la majorer en utilisant le résultat de 2.b

$$\left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) \right| \leq 2\|f\|_\infty \times \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha\right).$$

Or $\mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha\right) = \mathbb{P}(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$ (d'après 1.a), donc

$$\left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

A ce stade, on a montré

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

Reste à choisir n suffisamment grand : en posant $n_0 = \left\lceil \frac{\|f\|_\infty}{2\varepsilon\alpha^2} \right\rceil + 1$, on a

$$n \geq n_0 \implies \forall x \in [0, 1], |B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Finalement, on a établi que

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in [0, 1], |B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon,}$$

ce qui signifie exactement que la suite des polynômes de Bernstein $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

La fonction f étant une quelconque fonction continue de $[0, 1]$, on a démontré le théorème de Weierstrass sur $[0, 1]$.